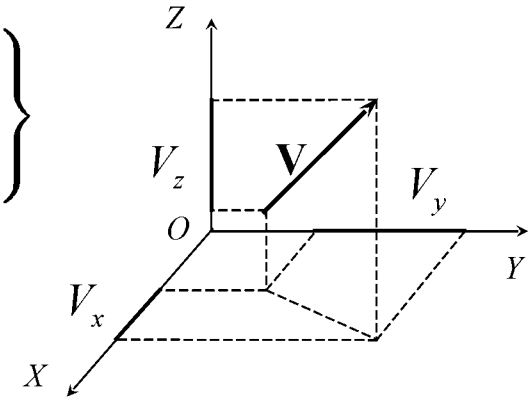
Prima di definire i modelli cinematici dei robot si introducono alcuni concetti di algebra matriciale utili per la rappresentazione della posizione e dell'orientamento, delle distribuzioni di velocità e accelerazione dei corpi rigidi e della cinematica relativa.

- rappresentazione matriciale dei vettori
- matrici di rotazione
- composizione delle matrici di rotazione
- rappresentazione minima dell'orientamento
- coordinate omogenee e matrici di posizione
- forma matriciale del prodotto scalare e vettoriale
- matrici di rototraslazione
- matrici dell'asse elicoidale
- matrici di velocità e di accelerazioni

$$\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}$$



Raccogliendo le componenti del vettore in un vettore colonna si ha la rappresentazione matriciale

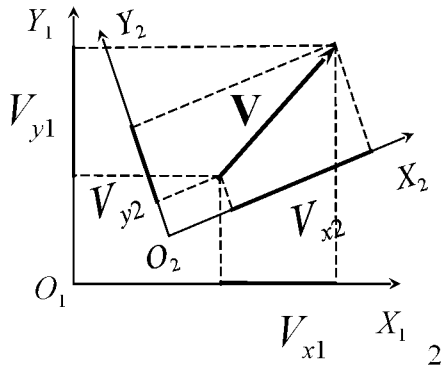
Le componenti del vettore dipendono dal sistema di riferimento. Considerando 2 terne **(1)** e **(2)**, le 2 rappresentazioni devono essere legate da una relazione , essendo la descrizione dello stesso vettore,

terna **(1)** $O_1X_1Y_1Z_1$

$$\vec{V} = V_{x1}\vec{x}_1 + V_{y1}\vec{y}_1 + V_{z1}\vec{z}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{Bmatrix}$$

terna **(2)** $O_jX_jY_jZ_j$

$$\vec{V} = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{Bmatrix}$$



Uguagliando i prodotti matriciali

$$\vec{V} = \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \vec{y}_1 & \vec{z}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{array} \right\}$$

Pre-moltiplicando per $\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{array} \right\}$ si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \vec{y}_1 & \vec{z}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{array} \right\}$$

Essendo $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ i versori di una terna ortogonale, si ha

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{array} \right\}$$

Chiamando con $\mathbf{R}_{12}$ la matrice $3\text{x}3$ a 2° membro e indicando con un apice $^{(1)}$ la terna rispetto alla quale le componenti di un vettore o una matrice sono calcolati, si ha

$$\mathbf{V}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{array} \right\} \qquad \mathbf{V}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{array} \right\} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}\, \mathbf{V}^{(2)}}$$

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}\, \mathbf{V}^{(2)}$$

Si definisce matrice di rotazione e si indica con $\mathbf{R}_{12}$

$$\mathbf{R}_{12} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} x_{x2} & y_{x2} & z_{x2} \\ x_{y2} & y_{y2} & z_{y2} \\ x_{z2} & y_{z2} & z_{z2} \end{array} \right]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_2^{(1)} & \mathbf{y}_2^{(1)} & \mathbf{z}_2^{(1)} \end{array} \right]$$

Dalla espressione a 2° membro di $\mathbf{R}_{12}$ si vede che le colonne sono i coseni direttori della terna (2) rispetto alla terna (1). Ciascuna colonna, 3° e 4° membro, rappresenta le componenti dei versori di (2) rispetto a (1).

La matrice $\mathbf{R}_{12}$ è ortogonale poiché, indicando con $\mathbf{I}$ la matrice identità $(3\text{x}3)$, si ha $\mathbf{R}_{12}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{12} = \mathbf{I}$, come risulta dalle seguenti relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{y}_2^{(1)} = 0, \quad \mathbf{y}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{z}_2^{(1)} = 0, \quad \mathbf{z}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{x}_2^{(1)} = 0 \\ \mathbf{x}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{x}_2^{(1)} = 1, \quad \mathbf{y}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{y}_2^{(1)} = 1, \quad \mathbf{z}_2^{(1)^{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{z}_2^{(1)} = 1 \end{array} \right.$$

Post moltiplicando per $\mathbf{R}_{12}^{-1}$ si ha $\mathbf{R}_{12}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}_{12}^{-1}$

La matrice $\mathbf{R}_{12}$ converte i vettori dal sistema (2) al sistema (1) $\qquad \mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}\,\mathbf{V}^{(2)} \quad (\#)$

La matrice $\mathbf{R}_{21}$ converte i vettori dal sistema (1) al sistema (2) $\qquad \mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{R}_{21}\,\mathbf{V}^{(1)}$

Pre-moltiplicando per $\mathbf{R}_{12}^{-1}$ $\quad \mathbf{R}_{12}^{-1}\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}^{-1}\mathbf{R}_{12}\,\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(2)},\ \mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{R}_{12}^{-1}\mathbf{V}^{(1)}$

Dal confronto della precedente con la seconda e dalle proprietà di ortogonalità si ha

$$\boxed{\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{12}^{-1}} \qquad \boxed{\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{12}^{\mathbf{T}}}$$

La matrice $\mathbf{R}$ è anche l'entità matriciale che ruota un vettore nello spazio, di un angolo rappresentato dalla matrice stessa. Detto $\mathbf{W}$ il vettore derivante dalla rotazione di $\mathbf{V}$ secondo $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}\mathbf{V}$. I vettori $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ hanno lo stesso modulo,

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}\,\mathbf{V},\ \mathbf{W}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}} \ \rightarrow\ \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{V} \ \xrightarrow{\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{-1}}\ \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}$$

e quindi risulta confermato che $\mathbf{W}$ rappresenta il vettore $\mathbf{V}$ ruotato di una quantità espressa dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}$

Riassumendo, la matrice $\mathbf{R}$ ha 3 interpretazioni geometriche

1) descrive l'orientamento di un sistema di riferimento cartesiano rispetto a un altro, tramite le componenti dei versori o dei coseni direttori della 2ª terna rispetto alla 1ª

$$\boxed{\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \end{bmatrix}}$$

2) converte la rappresentazione di un vettore tra due sistemi di riferimento

$$\boxed{\mathbf{V}^{(1)} = \begin{Bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \begin{Bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}\mathbf{V}^{(2)}}$$

3) ruota un vettore in uno stesso sistema di riferimento

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{R}\mathbf{V} \quad \text{con} \quad \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}}$$

Per l'ortogonalità $\mathbf{R}_{12}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{12} = \mathbf{I}$ e $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \rightarrow \det(\mathbf{R}_{12}) = 1$.

Dalla definizione di matrice di rotazione e dalla relazione $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}^{-1} = \mathbf{R}_{21}^{\mathbf{T}}$ si ricava

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} x_{x2} & y_{x2} & z_{x2} \\ x_{y2} & y_{y2} & z_{y2} \\ x_{z2} & y_{z2} & z_{z2} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{(1)} & \mathbf{y}_2^{(1)} & \mathbf{z}_2^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{x1} & x_{y1} & x_{z1} \\ y_{x1} & y_{y1} & y_{z1} \\ z_{x1} & z_{y1} & z_{z1} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(2)\mathbf{T}} \\ \mathbf{y}_1^{(2)\mathbf{T}} \\ \mathbf{z}_1^{(2)\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

Le colonne di $\mathbf{R}_{12}$ sono i coseni direttori o i versori della terna (2) rispetto alla terna (1), viceversa le righe sono i coseni direttori o i versori della terna (1) rispetto alla terna (2).

La stessa interpretazione si ottiene direttamente dalla definizione di $\mathbf{R}_{12}$ già data

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{x1} & x_{y1} & x_{z1} \\ y_{x1} & y_{y1} & y_{z1} \\ z_{x1} & z_{y1} & z_{z1} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(2)\mathbf{T}} \\ \mathbf{y}_1^{(2)\mathbf{T}} \\ \mathbf{z}_1^{(2)\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

Dalle interpretazioni trovate

$$\boxed{\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{x2} & y_{x2} & z_{x2} \\ x_{y2} & y_{y2} & z_{y2} \\ x_{z2} & y_{z2} & z_{z2} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{x1} & x_{y1} & x_{z1} \\ y_{x1} & y_{y1} & y_{z1} \\ z_{x1} & z_{y1} & z_{z1} \end{bmatrix}^{(2)}}$$

si deducono le relazioni

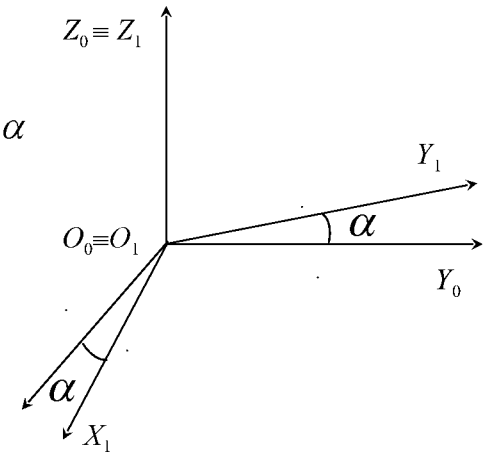
$$\begin{cases} x_{x2}^2 + x_{y2}^2 + x_{z2}^2 = 1 \\ y_{x2}^2 + y_{y2}^2 + y_{z2}^2 = 1 \\ z_{x2}^2 + z_{y2}^2 + z_{z2}^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{x1}^2 + y_{x1}^2 + z_{x1}^2 = 1 \\ x_{y1}^2 + y_{y1}^2 + z_{y1}^2 = 1 \\ x_{z1}^2 + y_{z1}^2 + z_{z1}^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2^{(1)} \times y_2^{(1)} = z_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} \times z_2^{(1)} = x_2^{(1)} \\ z_2^{(1)} \times x_2^{(1)} = y_2^{(1)} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(2)} \times y_1^{(2)} = z_1^{(2)} \\ y_1^{(2)} \times z_1^{(2)} = x_1^{(2)} \\ z_1^{(2)} \times x_1^{(2)} = y_1^{(2)} \end{cases}$$

o anche quelle già viste

$$x_2^{(1)T} \cdot y_2^{(1)} = 0 \quad y_2^{(1)T} \cdot z_2^{(1)} = 0 \quad z_2^{(1)T} \cdot x_2^{(1)} = 0$$
$$x_2^{(1)T} \cdot x_2^{(1)} = 1 \quad y_2^{(1)T} \cdot y_2^{(1)} = 1 \quad z_2^{(1)T} \cdot z_2^{(1)} = 1$$

Tutte queste relazioni sono equivalenti a 6 equazioni indipendenti tra i 9 termini della matrice di rotazione: R_{12} contiene solo 3 parametri indipendenti.

Sia $O_1X_1Y_1Z_1$ la terna ottenuta dalla terna di riferimento $O_0X_0Y_0Z_0$ con una rotazione elementare antioraria di un angolo α intorno all'asse coordinato Z. I versori di $O_1X_1Y_1Z_1$ hanno componenti rispetto agli assi della terna di riferimento (coseni direttori)



$$\mathbf{x}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{z}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La matrice di rotazione dalla terna (1) alla terna (0) è

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(0)} & \mathbf{y}_1^{(0)} & \mathbf{z}_1^{(0)} \end{bmatrix} = \boxed{\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Per rotazioni elementari di β intorno a Y e γ intorno a X si hanno matrici di rotazione

$$\boxed{\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}} \qquad \boxed{\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}}$$

Consideriamo tre terne aventi la stessa origine $OX_0Y_0Z_0$, $OX_1Y_1Z_1$ e $OX_2Y_2Z_2$ e con $\mathbf{V}^{(0)}$, $\mathbf{V}^{(1)}$, $\mathbf{V}^{(2)}$ le rappresentazioni nei tre sistemi di riferimento del vettore $\mathbf{V}$. Indicando con $\mathbf{R}_{01}$ e $\mathbf{R}_{02}$ le rotazioni delle terne (1) e (2) rispetto a (0), si ha

$$(a) \rightarrow \quad \mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{R}_{01}\mathbf{V}^{(1)} \qquad\qquad (b) \rightarrow \quad \mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{R}_{02}\mathbf{V}^{(2)}$$

Considerando la matrice di rotazione $\mathbf{R}_{12}$, si ha $\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{R}_{12}\mathbf{V}^{(2)}$. Sostituendo quest'ultima nella (*a*) si ha $\mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12}\mathbf{V}^{(2)}$ che confrontata con la (*b*) conduce a

$$\boxed{\mathbf{R}_{02} = \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12}}$$

La rotazione espressa dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}_{02}$, che porta una terna inizialmente sovrapposta con $OX_0Y_0Z_0$ in $OX_2Y_2Z_2$, può essere interpretata come composta da due rotazioni successive

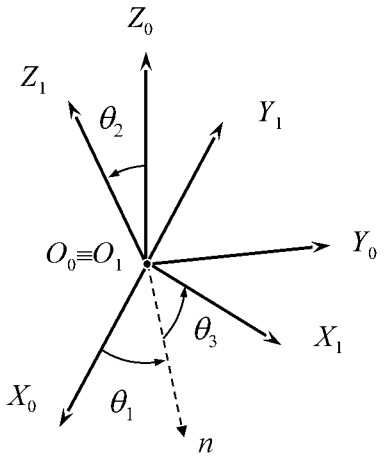
- una rotazione $\mathbf{R}_{01}$ che ruota la terna sovrapposta a $OX_0Y_0Z_0$ in $OX_1Y_1Z_1$
- Un'altra rotazione $\mathbf{R}_{12}$ che ruota la terna in $OX_1Y_1Z_1$ nella posizione finale $OX_2Y_2Z_2$

La rotazione complessiva composta da rotazioni parziali successive definite rispetto alla terna risultante dalle rotazioni precedenti, detta terna corrente, si ottiene moltiplicando da sinistra a destra le rotazioni successive rispetto alla terna corrente.

- L'orientamento relativo tra 2 corpi rigidi nello spazio si esprime tramite l'orientamento di 2 terne a essi solidali.
- La matrice di rotazione dà una descrizione ridondante dell'orientamento in quanto dei 9 elementi solo 3 sono indipendenti.
- Una descrizione con 3 parametri indipendenti è una rappresentazione minima dell'orientamento.
- Delle molteplici rappresentazioni minime ne consideriamo una.

Angoli di Eulero

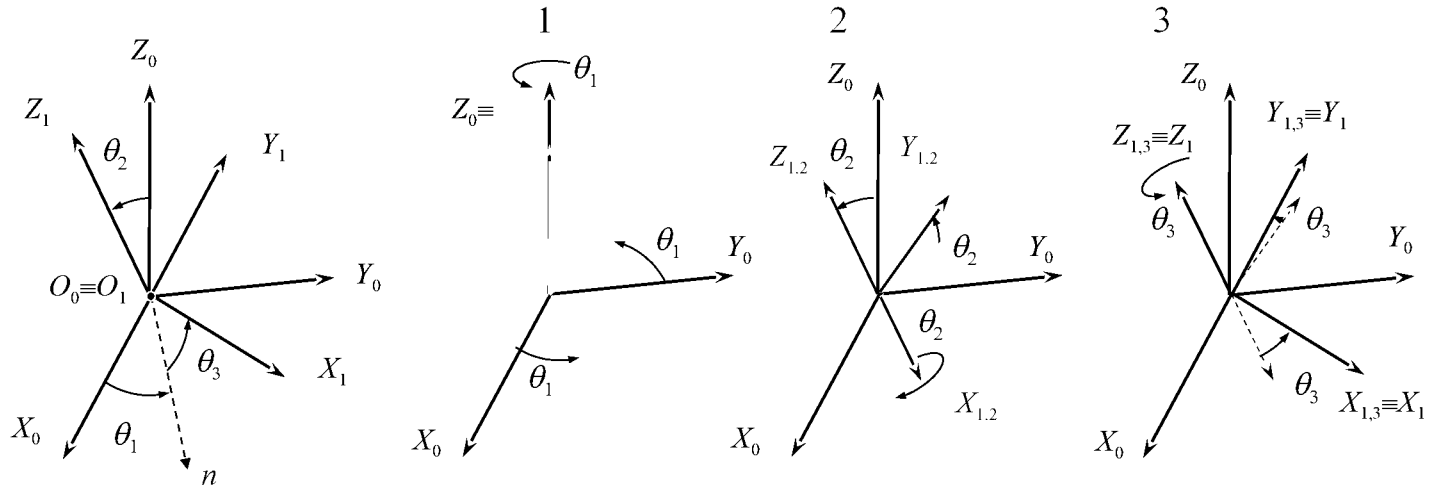
Forniscono una rappresentazione dell'orientamento componendo 3 rotazioni elementari rispetto agli assi della terna corrente.
Esistono 12 possibilità: si consideri la sequenza di rotazioni ZXZ



- rotazione di θ_1 intorno $Z_0 \equiv Z_{1,0} \equiv Z_{1,1}$
- rotazione di θ_2 intorno $X_{1,1} \equiv X_{1,2}$
- rotazione di θ_3 intorno $Z_{1,2} \equiv Z_{1,3} \equiv Z_1$

Il secondo indice è relativo alle posizioni intermedie della terna mobile.

posizioni intermedie

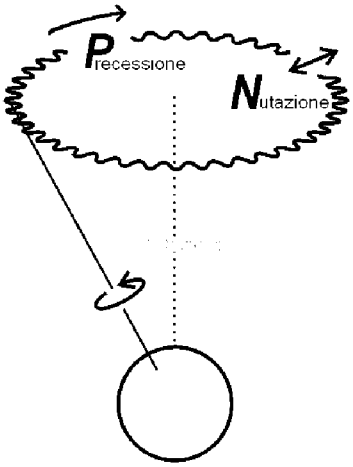


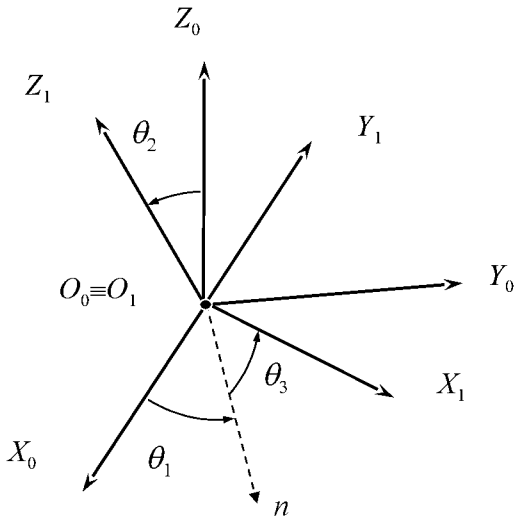
L'espressione della rotazione complessiva tramite la matrice di rotazione è

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{Z_{1,0}}(\theta_1)\ \mathbf{R}_{X_{1,1}}(\theta_2)\ \mathbf{R}_{Z_{1,2}}(\theta_3)$$

Gli angoli di Eulero sono interpretabili in altro modo. Definito l'asse dei nodi n , intersezione tra i piani X_0Y_0 e X_1Y_1:

- θ_1 angolo orientato da X_0 a n $\rightarrow$
- θ_2 angolo orientato da Z_0 a Z_1 $\rightarrow$ angolo di nutazione
- θ_3 angolo orientato da n a X_1 $\rightarrow$ angolo di rotazione propria





Angoli di Eulero $\leftrightarrow$ matrice di rotazione

La matrice di rotazione corrispondente è $\boxed{\mathbf{R} = R_{Z_{1,0}}(\theta_1)\ R_{X_{1,1}}(\theta_2)\ R_{Z_{1,2}}(\theta_3)}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponendo $S_i = \sin\theta_i$ e $C_i = \cos\theta_i$ si hanno le relazioni tra matrice di rotazione e angoli di Eulero

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_1C_3 - S_1C_2S_3 & -C_1S_3 - S_1C_2C_3 & S_1S_2 \\ S_1C_3 + C_1C_2S_3 & -S_1S_3 + C_1C_2C_3 & -C_1S_2 \\ S_2S_3 & S_2C_3 & C_2 \end{bmatrix}$$

Le relazioni inverse si ottengono semplicemente con i seguenti calcoli:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \cos\theta_2 = r_{33} & \sin\theta_2 = \sqrt{1-\cos^2\theta_2} \\ \cos\theta_1 = -r_{23}/\sin\theta_2 & \sin\theta_1 = r_{13}/\sin\theta_2 \\ \cos\theta_3 = r_{32}/\sin\theta_2 & \sin\theta_3 = r_{31}/\sin\theta_2 \end{array}$$

Gli angoli di Eulero si ricavano dalle relazioni $\rightarrow$ $\theta_i = \text{atan2}\left(\sin\theta_i,\ \cos\theta_i\right)$

Se $\sin\theta_2 = 0$ $\rightarrow$ $C_2 = \pm 1$ degenerano in una rotazione intorno Z pari a $\theta_1 \pm \theta_3$

È esprimibile tramite la posizione di un suo punto più l'orientamento. Usualmente si fissa una terna solidale al corpo:

- come punto si sceglie l'origine della terna
- come orientamento quello degli assi della terna

Queste informazioni possono essere in modo conveniente raggruppate in una matrice **4x4** coordinate omogenee.

Coordinate omogenee

La rappresentazione di un punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale destro è $P(x, y, z)$. Consideriamo le coordinate omogenee:

- 4 coordinate a, b, c, u
- relazioni con le coordinate cartesiane $\begin{cases} x = a/u \\ y = b/u \\ z = c/u \end{cases}$
- significativo il rapporto tra a, b, c e u: ∞^1 scelte
- u rappresenta il fattore di scala

Posizione e orientamento in coordinate omogenee

Con l'adozione della quaterna di coordinate è possibile descrivere

- un punto proprio $P(a, b, c, u)$, con il fattore di scala $\longrightarrow$ $u \neq 0$
- un punto improprio P_i cioè la direzione di tutte le rette di un fascio per il quale si ha
  - il fattore di scala $\longrightarrow$ $u = 0$
  - parametri direttori $\longrightarrow$ a, b, c
  - il segno di a, b, c determina il verso

Usualmente si assume

- punto proprio: $u = 1$ $\longrightarrow$ $P(\, a = x,\ b = y,\ c = z,\ 1\,)$

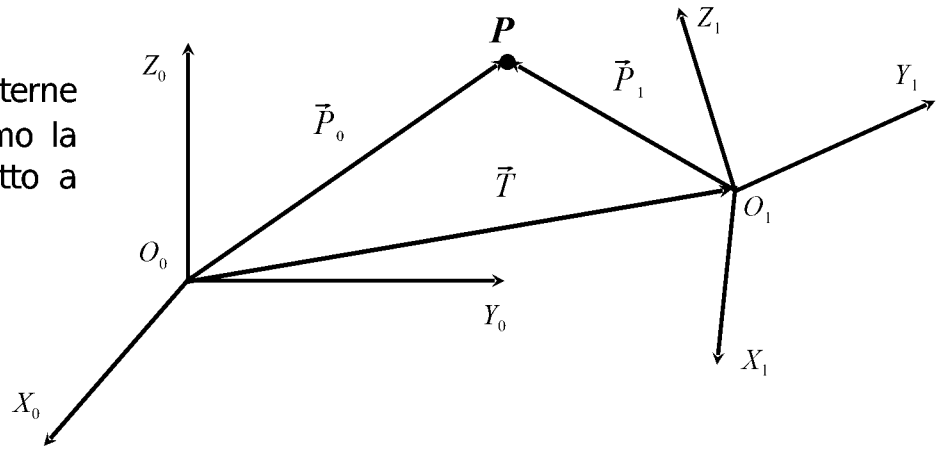
  omogenee $P = \{x \quad y \quad z \quad 1\}^T$ $\qquad$ $^3P = \{x \quad y \quad z\}^T$ cartesiane
- punto improprio: necessariamente $u = 0$
  - $P_i(a, b, c, 0)$
  - essendo significativo solo il rapporto tra a, b, c si pone $a^2+b^2+c^2=1$ e in questo caso a, b, c sono i coseni direttori

È una matrice **4x4** che contiene punti propri e impropri in coordinate omogenee. Considerate 2 terne qualsiasi permette di

- trasformare la rappresentazione in coordinate omogenee di un punto da un sistema a un altro $\longrightarrow$ trasformazione omogenea
- rappresentare una terna rispetto a un'altra

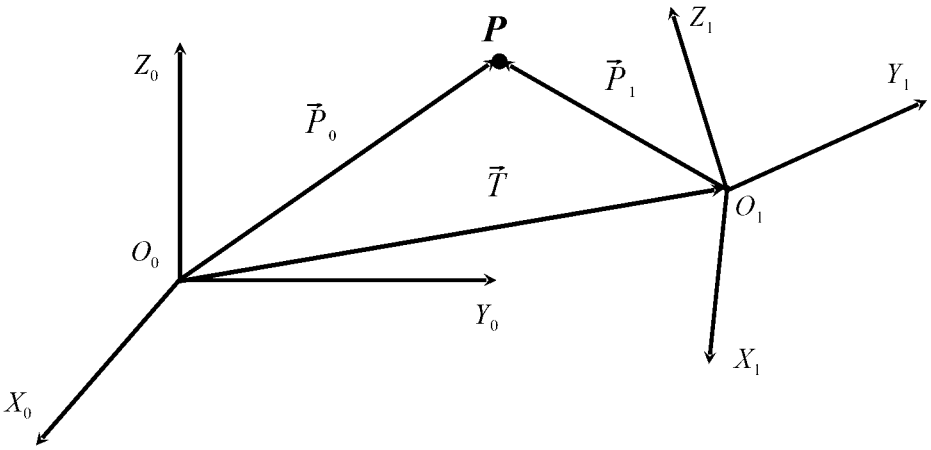
Supponiamo di avere 2 terne qualsiasi (0) e (1) e descriviamo la posizione di un punto P rispetto a esse.

$$\boxed{\vec{P}_0 = \vec{T} + \vec{P}_1}$$



Con una rappresentazione matriciale dei vettori rispetto a una generica terna (i) si ha

$$^3\mathbf{P}_0^{(i)} = {}^3\mathbf{T}^{(i)} + {}^3\mathbf{P}_1^{(i)}$$



$$\boxed{\begin{gathered}\vec{P}_0 = \vec{T} + \vec{P}_1 \\ {}^3\mathbf{P_0}^{(i)} = {}^3\mathbf{T}^{(i)} + {}^3\mathbf{P_1}^{(i)}\end{gathered}}$$

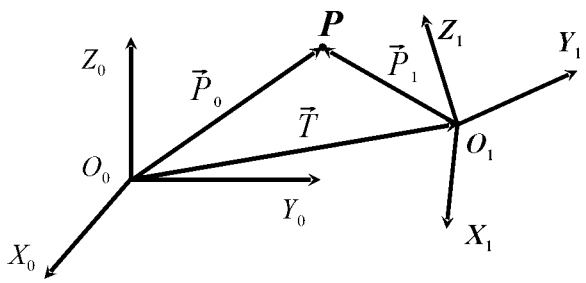
Le rappresentazioni matriciali dei vettori sono tutte riferite alla terna generica (i)

$$^3\mathbf{P}_0^{(i)} = \begin{Bmatrix} P_{0x}^{(i)} \\ P_{0y}^{(i)} \\ P_{0z}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{P}_1^{(i)} = \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(i)} \\ P_{1y}^{(i)} \\ P_{1z}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{T}^{(i)} = \begin{Bmatrix} T_x^{(i)} \\ T_y^{(i)} \\ T_z^{(i)} \end{Bmatrix}$$

È utile rappresentare $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{T}$ in (0) e $\mathbf{P}_1$ in (1)

$$^3\mathbf{P}_0^{(0)} = {}^3\mathbf{T}^{(0)} + {}^3\mathbf{P}_1^{(0)} = {}^3\mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{R}_{01}{}^3\mathbf{P}_1^{(1)}$$

$$\vec{P}_0 = \vec{T} + \vec{P}_1$$
$$^3\mathbf{P}_0^{(0)} = {}^3\mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{R}_{01}\,{}^3\mathbf{P}_1^{(1)}$$



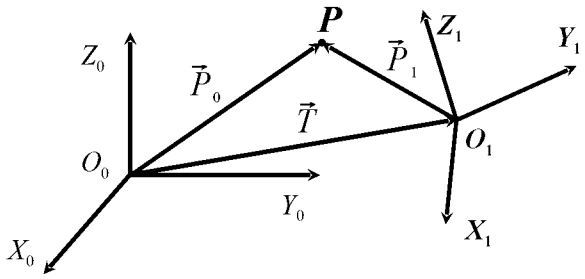
Impiegando le coordinate omogenee, si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} P_{0x}^{(0)} \\ P_{0y}^{(0)} \\ P_{0z}^{(0)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & \begin{matrix} T_x^{(0)} \\ T_y^{(0)} \\ T_z^{(0)} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(1)} \\ P_{1y}^{(1)} \\ P_{1z}^{(1)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} {}^3\mathbf{P}_0^{(0)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & {}^3\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} {}^3\mathbf{P}_1^{(1)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix}$$

Risulta così definita la matrice $\mathbf{M}_{01}$ con dimensioni 4x4

$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \begin{Bmatrix} {}^3\mathbf{P}_0^{(0)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix}, \mathbf{P}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} {}^3\mathbf{P}_1^{(1)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix}, \mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & \mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \boxed{\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}}$$

la quale permette di trasformare la rappresentazione in coordinate omogenee di un punto, da un sistema di riferimento a qualsiasi altro.

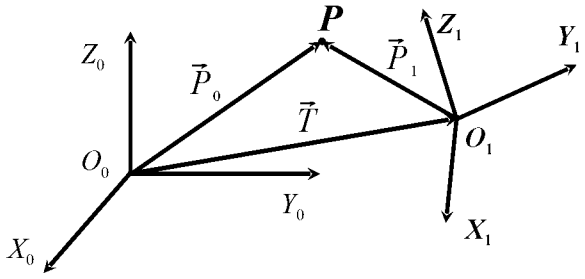


$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & \mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}$$

La matrice $\mathbf{M}_{01}$ descrive la posizione della terna (1) rispetto alla terna (0)

- $\mathbf{R}_{01}$ descrive l'orientamento di (1) rispetto a (0)
- $\mathbf{T}^{(0)}$ descrive la posizione dell'origine di (1) rispetto a (0)
- $\mathbf{M}_{01}$ è composta da 3 parametri di posizione $(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z,)$ e da 9 parametri di rotazione di cui solo 3 indipendenti: 6 parametri indipendenti, sufficienti per rappresentare un corpo nello spazio.
- $\mathbf{M}_{01}$, quindi, descrive la posizione di un corpo rigido solidale alla terna (1) rispetto alla terna (0) .

La matrice $\mathbf{M}_{01}$ dipende dalla scelta operata per i 2 sistemi

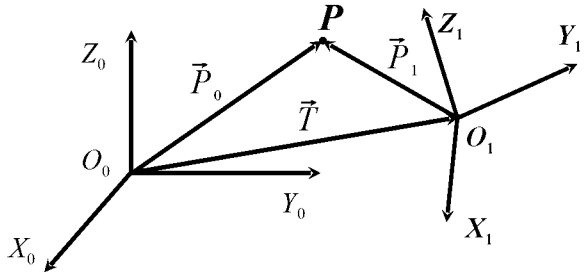


$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_{x1}^{(0)} & y_{x1}^{(0)} & z_{x1}^{(0)} & T_x^{(0)} \\ x_{y1}^{(0)} & y_{y1}^{(0)} & z_{y1}^{(0)} & T_y^{(0)} \\ x_{z1}^{(0)} & y_{z1}^{(0)} & z_{z1}^{(0)} & T_z^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- $\mathbf{M}_{01}$ assume i nomi
  - matrice di posizione
  - $\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} \quad \rightarrow \begin{cases} \text{matrice di trasformazione} \\ \text{matrice di cambio di coordinate} \end{cases}$
- ogni colonna di $\mathbf{M}_{01}$ contiene le coordinate omogenee dei punti notevoli della terna (1) espressi nella terna (0)
  - le prime 3 colonne sono i punti impropri di X_1, Y_1, Z_1 nella terna (0)
  - l'ultima colonna rappresenta l'origine di (1) vista dalla terna (0)
- $\mathbf{M}_{i\text{-}1,i}$ dà la posizione di ogni membro rispetto al precedente: è utile per descrivere la posizione di meccanismi a catena cinematica aperta

Trasformazione inversa

Dalla matrice $\mathbf{M}_{01}$ che converte le coordinate da (1) a (0) si calcola la matrice che compie l'operazione inversa



$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{P}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{10}\mathbf{P}_0^{(0)}$$

Moltiplicando a sinistra la prima per $\mathbf{M}_{01}^{-1}$ e confrontando

$$\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{P}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{P}_0^{(0)}$$

$$\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01}^{-1}$$

La trasformazione inversa è l'inversa della matrice di posizione. Tuttavia, la struttura delle matrici di posizione permette di ottenere convenientemente l'inversa rispetto alla formula generale.

$$\boxed{\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01}^{-1}}$$

$\mathbf{M}_{01}$ e $\mathbf{M}_{10}$ sono matrici di posizione con struttura nota, con $\mathbf{R}_{10}$ e $\mathbf{T}_{10}$ da determinare

$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & \mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{10} & & \mathbf{T}_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dalla definizione di matrice di posizione si ottiene $\mathbf{M}_{01}\,\mathbf{M}_{10}=\mathbf{I}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01} & & \mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{10} & & \mathbf{T}_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{01}\,\mathbf{R}_{10} = \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{R}_{10} = \mathbf{R}_{01}^{-1} = \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} \end{array} \right. \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{01}\,\mathbf{T}_{10} + \mathbf{T}_{01} = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{10} = -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{R}_{10} = \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{T}_{10} = -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \end{array}} \Longrightarrow \mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{10} & & \mathbf{T}_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dati 3 sistemi di riferimento $O_0X_0Y_0Z_0$, $O_1X_1Y_1Z_1$ e $O_2X_2Y_2Z_2$ e un generico punto P si hanno le relazioni, indicando con $\mathbf{M}_{01}$ e $\mathbf{M}_{02}$ le matrici di posizione che descrivono le terne (1) e (2) rispetto a (0),

$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{P}_2^{(2)} \qquad \text{(b)}$$

Considerando la matrice di posizione $\mathbf{M}_{12}$, si ha

$$\mathbf{P}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}$$

Sostituendo quest'ultima nella (a) si ha

$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}$$

che confrontata con la (b) conduce a

$$\boxed{\mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}}$$

Grafo orientato

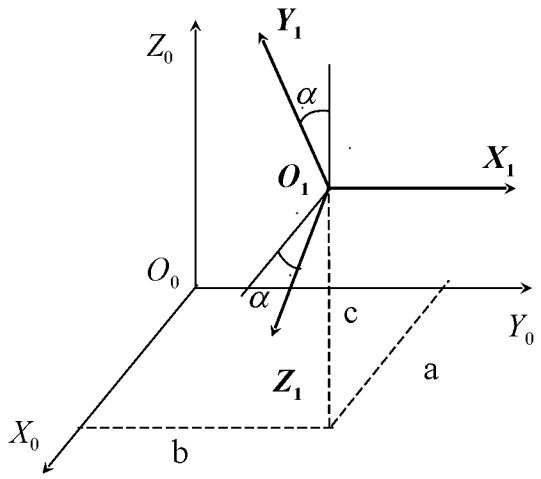
Quando si conoscono le matrici $\mathbf{M}_{ij}$ che descrivono le posizioni relative tra alcuni sistemi di riferimento è possibile ricavare altre matrici di posizione da quelle già note. A questo scopo è utile tracciare uno schema detto grafo orientato delle trasformazioni

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[r, "\mathbf{M}_{35}"] \arrow[d, "\mathbf{M}_{32}"] & 5 \\
1 \arrow[r, "\mathbf{M}_{12}"] & 2 \arrow[r, "\mathbf{M}_{24}"] & 4
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{14} = \mathbf{M}_{12}\,\mathbf{M}_{24} \\ \mathbf{M}_{15} = \mathbf{M}_{12}\,\mathbf{M}_{23}\,\mathbf{M}_{35} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}_{23} = \mathbf{M}_{32}^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}_{15} = \mathbf{M}_{12}\,\mathbf{M}_{32}^{-1}\,\mathbf{M}_{35} \\ \mathbf{M}_{45} = \mathbf{M}_{24}^{-1}\,\mathbf{M}_{32}^{-1}\,\mathbf{M}_{35} \end{cases}$$

Esempio

- Traslazione nella posizione finale → $\mathbf{M}_{01'}$
- Rotazione intorno a Y' di $\pi/2$ → $\mathbf{M}_{1'1''}$
- Rotazione intorno a Z'' di $\pi/2$ → $\mathbf{M}_{1''1'''}$
- Rotazione intorno a X''' di α → $\mathbf{M}_{1'''1}$



$$\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{01'}\mathbf{M}_{1'1''}\mathbf{M}_{1''1'''}\mathbf{M}_{1'''1}$$

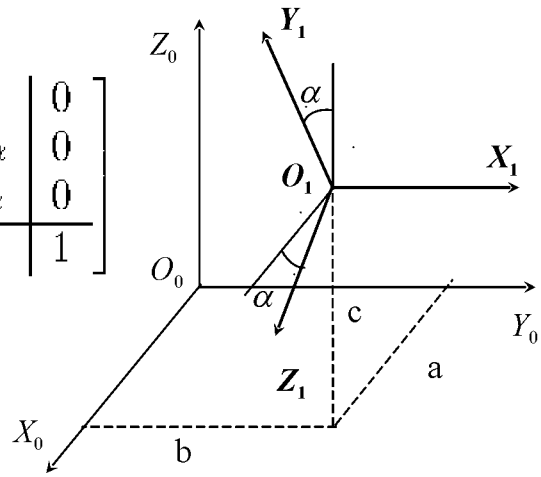
$$\mathbf{M}_{01'} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_{1'1''} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{R}_y(\pi/2) & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{01'}\mathbf{M}_{1'1''}\mathbf{M}_{1''1'''}\mathbf{M}_{1'''1}}$$

$$\mathbf{M}_{1''1'''} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{R}_z(\pi/2) & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_{1'''1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{R}_x(\alpha) & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



$$\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{01'}\mathbf{M}_{1'1''}\mathbf{M}_{1''1'''}\mathbf{M}_{1'''1}$$

$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

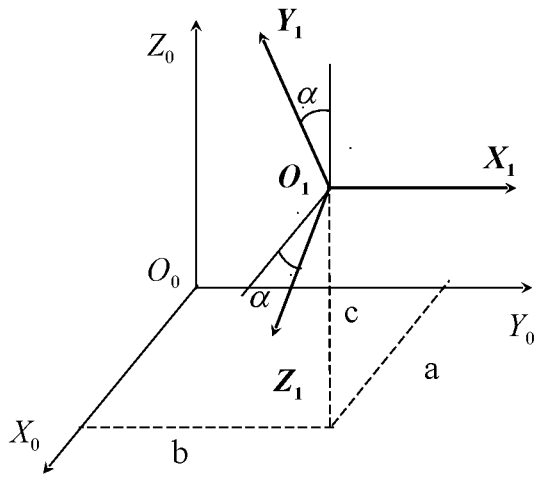
$$\mathbf{M}_{01} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_{03} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{23} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_{01} & & \mathbf{T}_{01} \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_{12} & & \mathbf{T}_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_{23} & & \mathbf{T}_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_{03} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23} & & \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12}\mathbf{T}_{23} + \mathbf{R}_{01}\mathbf{T}_{12} + \mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trasformazione inversa

$$\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{-1}$$



$$\mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -b \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & -a\sin\alpha - c\cos\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & -a\cos\alpha + c\sin\alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Per l'insieme di matrici antisimmetriche vale la relazione

$$\mathbf{S}^{\mathbf{T}} + \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

L'insieme delle matrici **3x3** che soddisfano la relazione precedente si indicano con $\mathbf{SS}(3)$ (Skew Symmetric). La relazione precedente è equivalente alle 9 equazioni

$$s_{ij} + s_{ji} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3$$

Dalle equazioni precedenti risulta

- $s_{ii} = 0$, i termini sulla diagonale sono nulli
- $s_{ij} = -s_{ji} \quad (i \neq j)$, i termini fuori diagonale sono antisimmetrici
- quindi le matrici $\mathbf{SS}(3)$ contengono solamente 3 termini indipendenti e hanno la forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi le $\mathbf{SS}(3)$ consentono una rappresentazione matriciale dei vettori, la quale in alcune situazioni è conveniente. Dato un vettore $\vec{V}$, si hanno le 2 rappresentazioni matriciali

$$\vec{V} = V_{xi}\vec{x} + V_{yi}\vec{y} + V_{zi}\vec{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{(i)} = \begin{Bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ V_{zi} \end{Bmatrix} \\ \underline{\mathbf{V}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -V_{zi} & V_{yi} \\ V_{zi} & 0 & -V_{xi} \\ -V_{yi} & V_{xi} & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{V}}^{(i)^{\mathbf{T}}} = -\underline{\mathbf{V}}^{(i)} \end{cases}$$

Con la rappresentazione $\mathbf{SS}(3)$ il cambiamento di riferimento si esprime con la relazione

$$\boxed{\underline{\mathbf{V}}^{(i)} = \mathbf{R}_{ij}\underline{\mathbf{V}}^{(j)}\mathbf{R}_{ji}}$$

La rappresentazione $\mathbf{SS}(3)$ è utile per esprimere il prodotto vettoriale. Si ha

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{c} = \underline{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{c}} = -\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}} + \mathbf{b}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} \\ \underline{\mathbf{c}} = -\underline{\mathbf{a}\mathbf{b}}^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{b}\mathbf{a}}^{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{a}\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{b}\mathbf{a}} \end{cases}}$$

Usando entrambe le rappresentazioni possiamo esprimere in forma matriciale sia il prodotto scalare sia il prodotto vettoriale. Dati due vettori $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, il prodotto scalare è

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \rightarrow \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{W}$$

Dato un vettore $\mathbf{V}$ si hanno le semplici proprietà

prodotto scalare	**prodotto vettoriale**
$\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \|\|\mathbf{V}\|\|^2$	$\underline{\mathbf{V}}\,\mathbf{V} = \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Dato un versore $\vec{u}$ si hanno le relazioni

$$\mathbf{u^T u} = 1\,, \quad \underline{\mathbf{u}}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \quad \underbrace{\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u^T} = -\underline{\mathbf{u}}^2}\,, \qquad \underline{\mathbf{u}}^{n+2} = -\underline{\mathbf{u}}^n \quad \forall n \geq 1$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-u_x^2 & -u_x u_y & -u_x u_z \\ -u_y u_x & 1-u_y^2 & -u_y u_z \\ -u_z u_x & -u_z u_y & 1-u_z^2 \end{bmatrix}$$

$$-\underline{\mathbf{u}}^2 = -\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_z^2+u_y^2 & -u_x u_y & -u_x u_z \\ -u_y u_x & u_z^2+u_x^2 & -u_y u_z \\ -u_z u_x & -u_z u_y & u_y^2+u_x^2 \end{bmatrix}$$

essendo $\vec{u}$ un versore e quindi $\rightarrow \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$

Dato un versore $\vec{u}$ e un vettore $\vec{V}$ si hanno le relazioni

- componente di $\vec{V}$ secondo la direzione $\vec{u}$

$$\lambda = \vec{V} \cdot \vec{u} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\lambda = \mathbf{V^T u} = \mathbf{u^T V}}$$

- componente di $\vec{V}$ secondo una giacitura π normale a $\vec{u}$

$$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \lambda \vec{u}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u^T} = -\underline{\mathbf{u}}^2$$

$$\mathbf{V}_\pi = \mathbf{V} - \mathbf{u}\,\lambda = \mathbf{V} - \mathbf{u}\,\left(\mathbf{u^T V}\right) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u^T}\right)\,\mathbf{V} = -\underline{\mathbf{u}}^2\,\mathbf{V}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_\pi = -\underline{\mathbf{u}}^2\,\mathbf{V}}$$

- dato un versore $\vec{u}$ e un vettore a esso normale $\vec{V}_\pi$

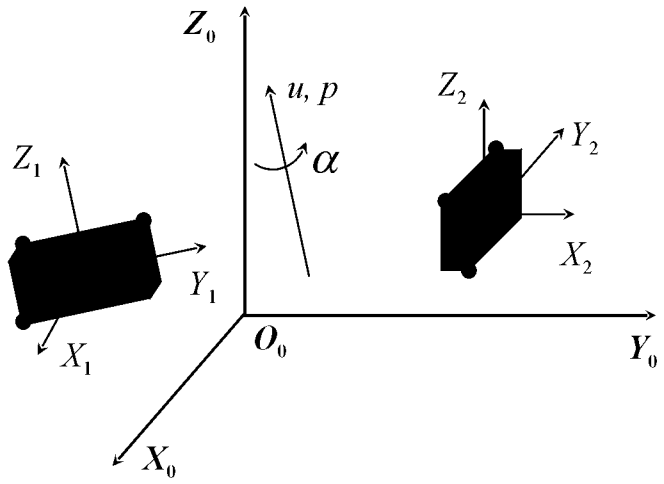
$$\mathbf{u^T V}_\pi = 0$$

$$\underline{\mathbf{u}}^2\,\mathbf{V}_\pi = -\,\left(\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u^T}\right)\,\mathbf{V}_\pi = -\,\mathbf{V}_\pi + \mathbf{u}\,\left(\mathbf{u^T V}_\pi\right) \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{V}_\pi = -\underline{\mathbf{u}}^2\,\mathbf{V}_\pi$$

Ogni spostamento finito nello spazio di un corpo è equivalente a una rototraslazione elicoidale. Una rototraslazione elicoidale può essere descritta tramite trasformazioni omogenee.

Una rototraslazione elicoidale è definita da

- un asse elicoidale
  - il versore dell'asse $\vec{u}$
  - un suo punto **P***
- ampiezza della rotazione α
- $\begin{cases} \text{passo dell'elica} & p \\ \text{traslazione} & h = p \cdot \alpha \end{cases}$



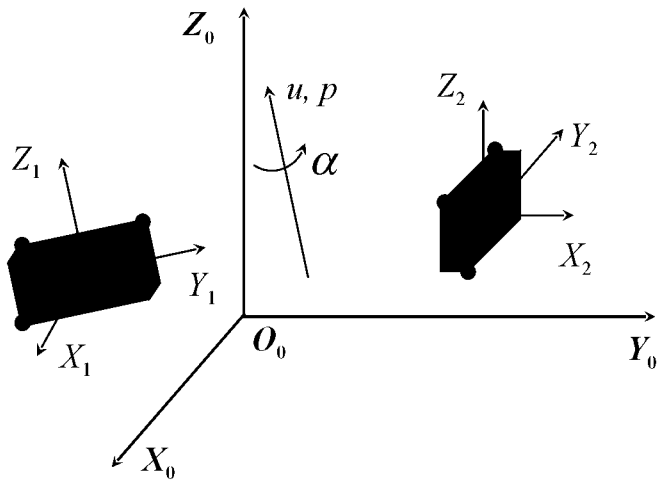
Se di un corpo rigido è nota la posizione di suoi 3 punti $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, $P_3^{(0)}$ rispetto a una terna (0) è individuata la posizione del corpo. Consideriamo la rototraslazione che porta il corpo dalla posizione 1 alla posizione 2.

Consideriamo la rototraslazione elicoidale che porta il corpo dalla posizione 1 alla posizione 2

$$\mathbf{P}_{1,1}^{(0)}, \quad \mathbf{P}_{2,1}^{(0)}, \quad \mathbf{P}_{3,1}^{(0)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_{1,2}^{(0)}, \quad \mathbf{P}_{2,2}^{(0)}, \quad \mathbf{P}_{3,2}^{(0)}$$

Il legame tra i punti nelle due posizioni si descrive con una matrice detta matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$ che contiene le informazioni dell'asse elicoidale ($\mathbf{P}^*$, $\vec{u}$, p) e dell'ampiezza del movimento α.

La matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$, descrive la rototraslazione elicoidale del corpo, mettendo in relazione le posizioni dei punti nelle due posizioni



$$\boxed{\mathbf{P}_{j,2}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)} \mathbf{P}_{j,1}^{(0)} \quad \text{con} \quad j = 1, 2, 3}$$

Per definire $\mathbf{Q}^{(0)}$ scriviamo le 3 relazioni $\mathbf{P}_{j,2}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{P}_{j,1}^{(0)}$ in forma matriciale compatta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,2}^{(0)} & \mathbf{P}_{2,2}^{(0)} & \mathbf{P}_{3,2}^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,1}^{(0)} & \mathbf{P}_{2,1}^{(0)} & \mathbf{P}_{3,1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

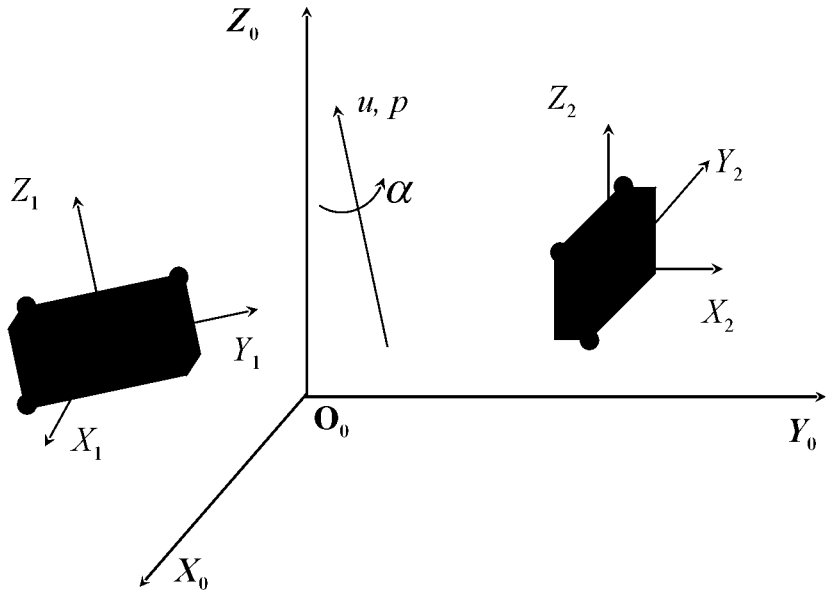
Fissando arbitrariamente sul corpo una terna, che nel movimento assume le posizioni $O_1X_1Y_1Z_1$ e $O_2X_2Y_2Z_2$, l'identificazione di $\mathbf{Q}^{(0)}$ è immediata, introducendo nella relazione precedente

4 punti notevoli della terna
- punti impropri degli assi
- origine della terna

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{X}_2^{(0)} & \mathbf{Y}_2^{(0)} & \mathbf{Z}_2^{(0)} & \mathbf{O}_2^{(0)} \end{array}\right]}_{\mathbf{M}_{02}} = \mathbf{Q}^{(0)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{X}_1^{(0)} & \mathbf{Y}_1^{(0)} & \mathbf{Z}_1^{(0)} & \mathbf{O}_1^{(0)} \end{array}\right]}_{\mathbf{M}_{01}}$$

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{M}_{01} \quad \rightarrow \times\, \mathbf{M}_{01}^{-1} \quad \rightarrow \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{01}^{-1} = \mathbf{Q}^{(0)}\,\mathbf{M}_{01}\,\mathbf{M}_{01}^{-1}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{M}_{01}^{-1}} \rightarrow \mathbf{M}_{01}^{-1} = \mathbf{M}_{10} \rightarrow \boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{10}}$$



$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{X}_2^{(0)} & \mathbf{Y}_2^{(0)} & \mathbf{Z}_2^{(0)} & \mathbf{O}_2^{(0)} \end{array}\right]}_{\mathbf{M}_{02}} = \mathbf{Q}^{(0)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{X}_1^{(0)} & \mathbf{Y}_1^{(0)} & \mathbf{Z}_1^{(0)} & \mathbf{O}_1^{(0)} \end{array}\right]}_{\mathbf{M}_{01}}$$

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{M}_{01} \quad \rightarrow \times\, \mathbf{M}_{01}^{-1} \quad \rightarrow \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{01}^{-1} = \mathbf{Q}^{(0)}\,\mathbf{M}_{01}\,\mathbf{M}_{01}^{-1}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{M}_{01}^{-1}} \rightarrow \mathbf{M}_{01}^{-1} = \mathbf{M}_{10} \rightarrow \boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{10}}$$

La matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$

- non dipende dal posizionamento della terna sul corpo
- dipende dal sistema di riferimento $\mathbf{(0)}$: considerando una terna $\boldsymbol{(k)}$

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{10} \qquad \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k2}\,\mathbf{M}_{1k}$$

Per trovare il legame tra $\mathbf{Q}^{(0)}$ e $\mathbf{Q}^{(k)}$ scomponiamo

- $\mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{0k}\mathbf{M}_{k2}$
- $\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{1k}\mathbf{M}_{k0}$

sostituendo queste espressioni nella prima delle precedenti

$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{10} = (\mathbf{M}_{0k}\mathbf{M}_{k2})\,(\mathbf{M}_{1k}\mathbf{M}_{k0})$ essendo $\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k2}\mathbf{M}_{1k}$

$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0k}\mathbf{Q}^{(k)}\mathbf{M}_{k0}}$ o la relazione inversa $\boxed{\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k0}\mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{M}_{0k}}$

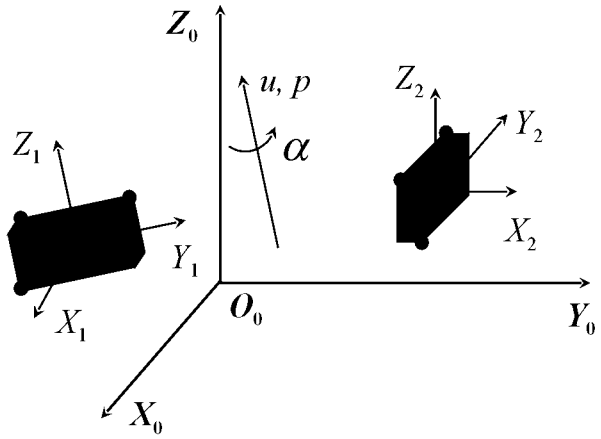
La relazione è analoga a quella per il cambio di base per vettori nella rappresentazione con matrici $\mathbf{SS}(3)$ $\longrightarrow$ $\underline{\mathbf{V}}^{(i)} = \mathbf{R}_{ij}\underline{\mathbf{V}}^{(j)}\mathbf{R}_{ji}$

La matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$, essendo definita come un prodotto tra matrici di posizione, ne ha la stessa struttura

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \Delta\mathbf{R}^{(0)} & & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- $\Delta\mathbf{R}^{(0)}$ descrive la rotazione del corpo nel sistema di riferimento (0)
- $\Delta\mathbf{T}^{(0)}$ la traslazione del corpo nel sistema di riferimento (0)
- con più precisione $\Delta\mathbf{T}^{(0)}$ rappresenta lo spostamento del punto solidale al corpo sovrapposto con l'origine di $\mathbf{(0)}$ quando si trova nella posizione 1, infatti si può scrivere $\mathbf{P}^{(0)}_{0,2} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{P}^{(0)}_{0,1}$, essendo

$$\mathbf{P}^{(0)}_{0,1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}^{(0)}_{0,2} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \Delta\mathbf{R}^{(0)} & & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 1 \end{array}\right\}$$



- $\Delta\mathbf{R}^{(0)}$ descrive la rotazione del corpo nel sistema di riferimento (0)
- $\Delta\mathbf{T}^{(0)}$ la traslazione del corpo nel sistema di riferimento (0)
- con più precisione $\Delta\mathbf{T}^{(0)}$ rappresenta lo spostamento del punto solidale al corpo sovrapposto con l'origine di **(0)** quando si trova nella posizione 1, infatti si può scrivere $\mathbf{P}_{0,2}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{P}_{0,1}^{(0)}$, essendo

$$\mathbf{P}_{0,1}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_{0,2}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\Delta\mathbf{R}^{(0)}} & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 1 \end{Bmatrix}$$

Alla matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$ può essere dato un ulteriore significato se si prendono come riferimento per la descrizione del moto le terne **(1)** o **(2)** alternativamente

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\,\mathbf{M}_{10}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{11} \\ \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{M}_{22}\mathbf{M}_{12} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}_{ii} = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{M}_{12}$$

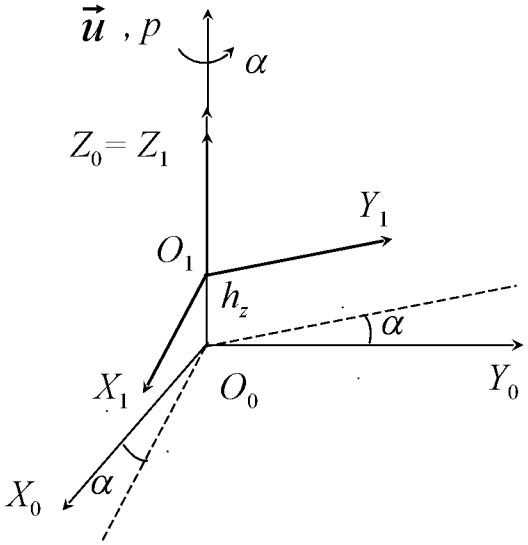
In questa situazione il cambiamento di riferimento si scrive

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k0}\mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{M}_{0k} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k1}\mathbf{Q}^{(1)}\mathbf{M}_{1k} = \mathbf{M}_{k1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{1k}$$

Tramite la seconda espressione, si può dare alla matrice di rototraslazione un significato geometrico duale

- $\mathbf{Q}^{(k)}$ rappresenta la posizione della terna **(2)** rispetto alla terna **(1)** vista dal sistema di riferimento $(k) \rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{k1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{1k}$
- la matrice di posizione è una matrice di rototraslazione nel caso particolare in cui, come sistema di riferimento per la descrizione del moto, si assuma la terna **(1)** o la terna **(2)** $\rightarrow \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{M}_{12}^{(1)} = \mathbf{M}_{12}^{(2)}$
- in sintesi si può scrivere $\rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{M}_{12}^{(k)}$

Quando la rototraslazione di un corpo avviene rispetto a un asse coordinato del sistema di riferimento **(0)** si hanno forme particolarmente semplici. Dalla rotazione elementare intorno all'asse $\boldsymbol{Z}$



$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha $\mathbf{Q}_z^{(0)}(\alpha, h_z) = \mathbf{M}_{01}$ $\longrightarrow$

$$\mathbf{Q}_z^{(0)}(\alpha, h_z) = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{Q}_y^{(0)}(\beta, h_y) = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h_y \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

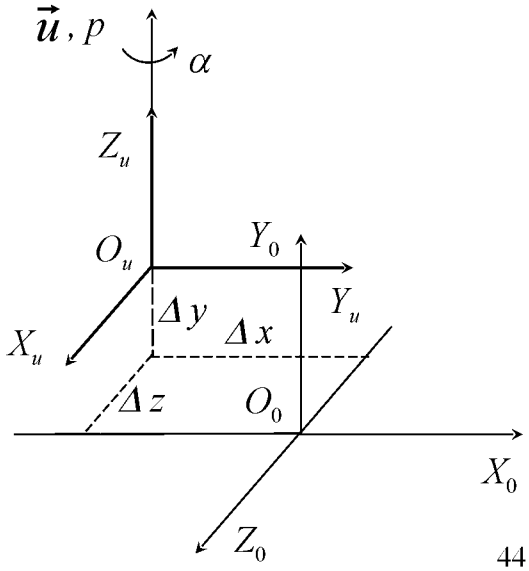
$$\mathbf{Q}_x^{(0)}(\gamma, h_x) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & h_x \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matrici di rototraslazione analoghe si hanno per gli assi coordinati e

Esempio

Si vuole descrivere nel sistema di riferimento **(0)** la rototraslazione elicoidale rispetto all'asse $\vec{u}$. Per questo definiamo una terna $(\boldsymbol{u})$ con l'asse Z_u coincidente con l'asse elicoidale con versore $\vec{u}$ e usiamo la relazione

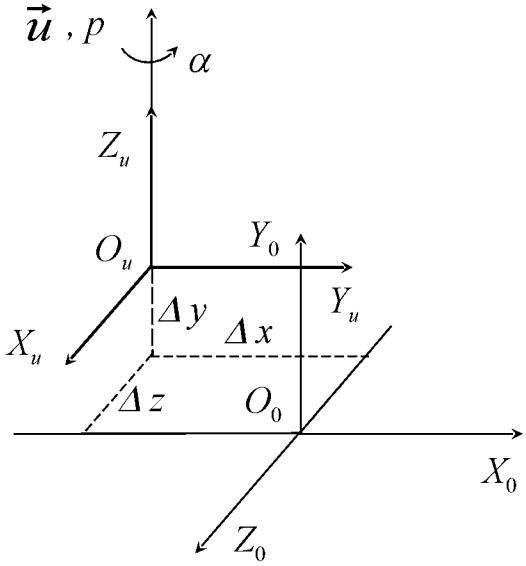
$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0u}\mathbf{Q}_z^{(u)}\mathbf{M}_{u0}$$



$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0u}\mathbf{Q}_z^{(u)}\mathbf{M}_{u0}$$

La rototraslazione rispetto alla terna (***u***) è

$$\mathbf{Q}_z^{(u)} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad h = p\alpha$$



Le matrici $\mathbf{M}_{0u}$ e $\mathbf{M}_{u0}$ che esprimono le posizioni relative delle terne (**0**) e (***u***) sono

$$\mathbf{M}_{0u} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y \\ 1 & 0 & 0 & -\Delta z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{M}_{u0} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{0u}^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_{0u}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{0u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

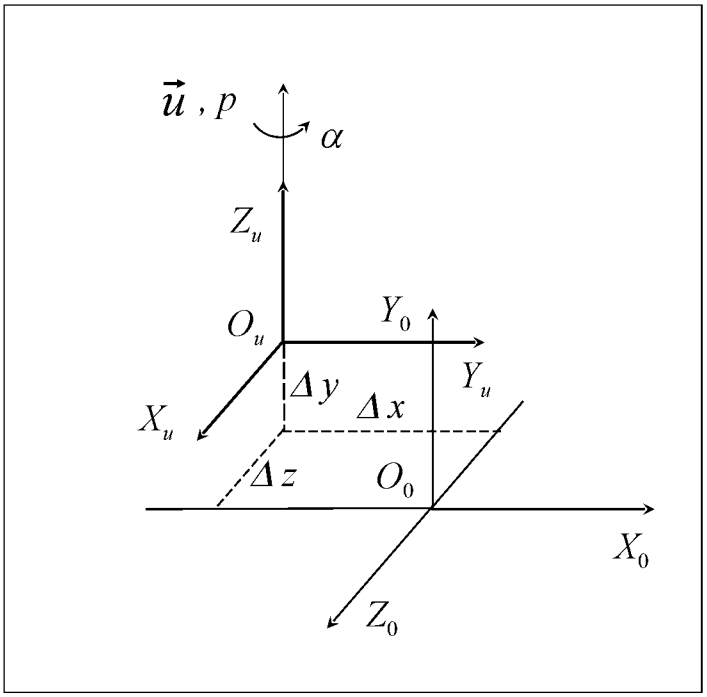
$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0u}\mathbf{Q}_z^{(u)}\mathbf{M}_{u0}$$

Eseguendo il cambio dalla terna (**0**) alla terna (***u***) si ha

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0u}\mathbf{Q}_z^{(u)}\mathbf{M}_{u0} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y \\ 1 & 0 & 0 & -\Delta z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

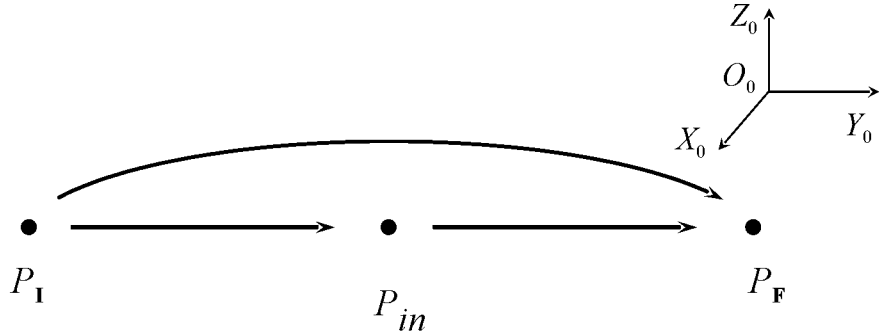
$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & \Delta x\left(\cos\alpha - 1\right) + \Delta z \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & h \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & -\Delta x \sin\alpha + \Delta z\left(\cos\alpha - 1\right) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$



$$\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & \Delta x\,(\cos\alpha - 1) + \Delta z \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & h \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & -\Delta x \sin\alpha + \Delta z\,(\cos\alpha - 1) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Una sequenza di rototraslazioni, come qualsiasi spostamento finito, può essere descritta da una rototraslazione elicoidale globale. Se lo spostamento di un corpo

- da una posizione iniziale $P_{\mathbf{I}}$
- a una posizione finale $P_{\mathbf{F}}$
- è descritto con 2 rototraslazioni attraverso una posizione intermedia P_{in}
- lo spostamento $P_{\mathbf{I}} \rightarrow P_{\mathbf{F}}$ si descrive con la rototraslazione globale $\mathbf{Q}_G^{(0)}$



Consideriamo le rototraslazioni globali rispetto

- una terna fissa
- la terna corrente

Rototraslazioni rispetto a una terna fissa

Se le rototraslazioni sono tutte espresse rispetto a uno stesso sistema di riferimento **(0)** si ha (si omette l'apice corrispondente per le posizioni)

$$\mathbf{P_I} \rightarrow \mathbf{P}_{in} \qquad \mathbf{P}_{in} \rightarrow \mathbf{P_F} \qquad\qquad \mathbf{P_I} \rightarrow \mathbf{P_F}$$

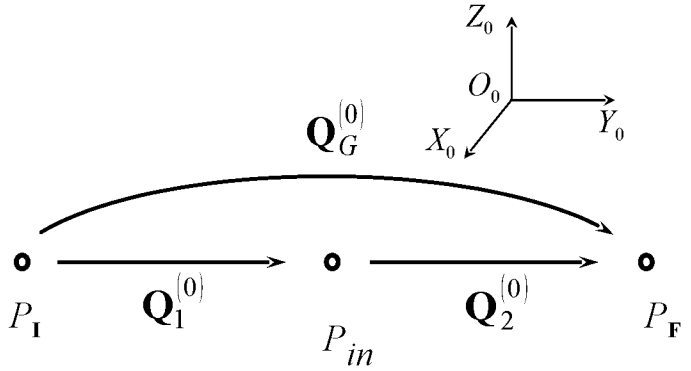
$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{P_I} \qquad \mathbf{P_F} = \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{P}_{in} \qquad\qquad \mathbf{P_F} = \mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)}\mathbf{P_I}$$

Sostituendo la 1ª nella 2ª si ha

$$\mathbf{P_F} = \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{P_I}$$

che confrontata con la 3ª dà

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{Q}_1^{(0)}$$

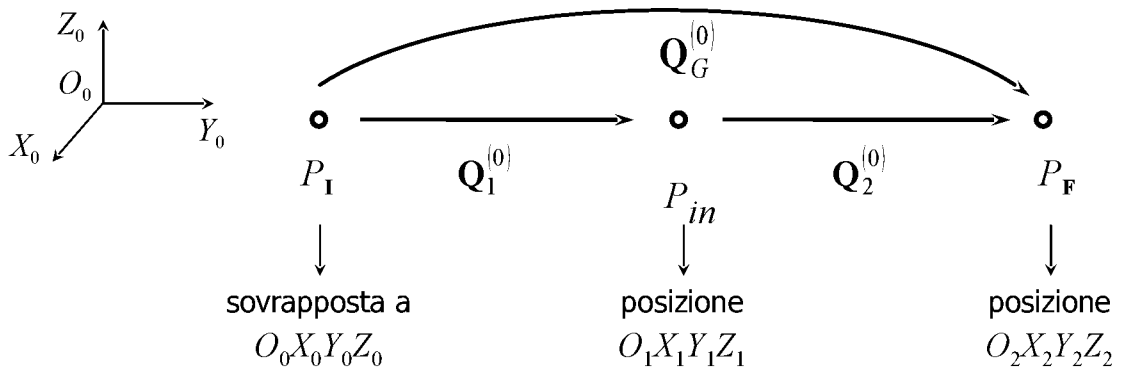


In generale, per n rototraslazioni $\boxed{\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{Q}_n^{(0)}\mathbf{Q}_{n-1}^{(0)}\cdots\mathbf{Q}_{i+1}^{(0)}\mathbf{Q}_i^{(0)} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{Q}_1^{(0)}}$

Nel caso di rototraslazioni espresse rispetto a una terna fissa **(0)** la rototraslazione globale si ottiene moltiplicando da destra a sinistra

Rototraslazioni rispetto la terna corrente

Data una terna fissa $O_0X_0Y_0Z_0$ e una mobile $O_iX_iY_iZ_i$ inizialmente sovrapposta alla fissa, componiamo le rototraslazioni rispetto alla posizioni della terna mobile in seguito allo spostamento precedente



Trasformiamo l'espressione relativa alla terna fissa

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{Q}_1^{(0)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}_2^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{Q}_2^{(1)}\mathbf{M}_{10}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{Q}_2^{(1)}\mathbf{M}_{10}\mathbf{Q}_1^{(0)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}_1^{(0)} = \mathbf{M}_{01}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{Q}_2^{(1)}\mathbf{M}_{10}\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{Q}_2^{(1)} = \mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{Q}_2^{(1)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} &= \mathbf{Q}_2^{(0)}\mathbf{Q}_1^{(0)} \\ \mathbf{Q}^{(h)} &= \mathbf{M}_{hk}\mathbf{Q}^{(k)}\mathbf{M}_{kh} \\ \mathbf{Q}^{(1)} &= \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{M}_{12} \end{aligned}}$$

Nel caso di n rototraslazioni in terna corrente si ha

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{Q}_1^{(0)}\mathbf{Q}_2^{(1)} \;\cdots\; \mathbf{Q}_i^{(i-1)}\mathbf{Q}_{i+1}^{(i)} \;\cdots\; \mathbf{Q}_{n-1}^{(n-2)}\mathbf{Q}_n^{(n-1)}}$$

Nel caso di rototraslazioni espresse rispetto alla terna corrente la rototraslazione globale si ottiene moltiplicando da sinistra a destra

---

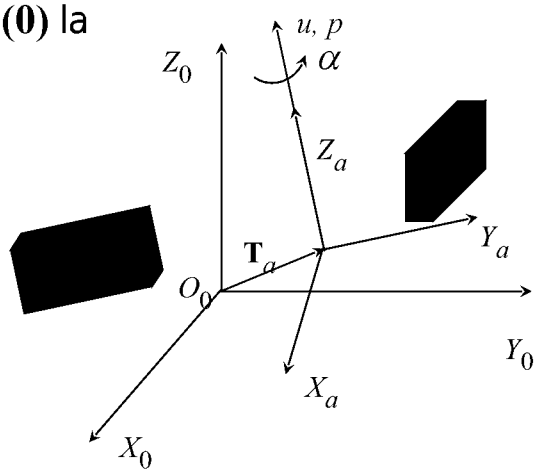
Le rototraslazioni non sono commutative cioè

$$\mathbf{Q}_{i+1}\,\mathbf{Q}_i \neq \mathbf{Q}_i\,\mathbf{Q}_{i+1}$$

Costituiscono delle eccezioni alcuni casi particolari

- rototraslazioni intorno allo stesso asse
- traslazioni semplici

Costruiamo la matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$ che descrive rispetto a **(0)** la rototraslazione intorno a un asse qualsiasi $\vec{u}$



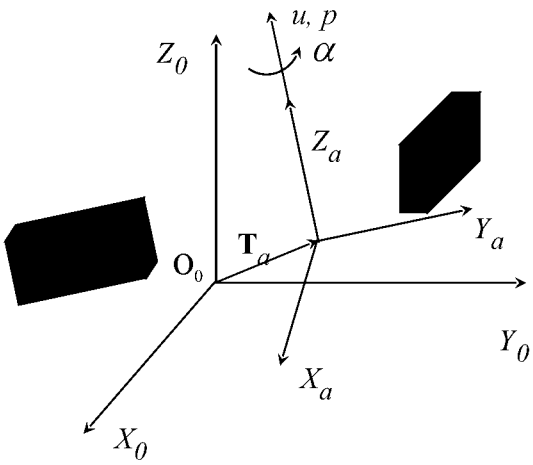
- descrivere la rototraslazione con
  - asse elicoidale P^*, $\vec{u}$
  - rotazione α
  - passo $p = h/a$ o traslazione h
- rispetto a una terna (a) avente
  - l'asse Z_a allineato con $\vec{u}$

$$C = \cos\alpha\,, \quad S = \sin\alpha$$

$$\mathbf{Q}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{za} & & \mathbf{H} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- operare un cambiamento di riferimento con l'espressione $\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0a}\mathbf{Q}^{(a)}\mathbf{M}_{a0}$ in cui la matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$ rappresenta la rototraslazione nel riferimento **(0)**

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0a}\mathbf{Q}^{(a)}\mathbf{M}_{a0}}$$



La matrice $\mathbf{M}_{0a}$ individua la posizione della terna **(*a*)** nel riferimento **(0)**; indicando con $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ i versori di **(*a*)** e con $\mathbf{s}^{(0)}$, $\mathbf{t}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ la loro descrizione nel sistema **(0)**, risulta

$$\mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a & & \mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{s}^{(0)} & \mathbf{t}^{(0)} & \mathbf{u}^{(0)} & \mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

trasformazione diretta

$$\mathbf{M}_{a0} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} & & \\ & \mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} \\ & \mathbf{u}^{(0)\mathbf{T}} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

trasformazione inversa

Applicando la relazione $\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0a}\mathbf{Q}^{(a)}\mathbf{M}_{a0}$ si ha

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a & & \mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{za} & & \mathbf{H} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \Delta\mathbf{R}^{(0)} & & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}} & & -\mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} + \mathbf{R}_a\mathbf{H} + \mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Calcoliamo separatamente i 2 termini

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}} \\ \Delta\mathbf{T}^{(0)} = -\mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} + \mathbf{R}_a\mathbf{H} + \mathbf{T}_a^{(0)} \end{cases}$$

Per il calcolo di $\Delta\mathbf{R}^{(0)}$ si immettono le matrici di rotazione

$$\Delta\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}} = \left[\ \mathbf{s}^{(0)} \ \vdots\ \mathbf{t}^{(0)} \ \vdots\ \mathbf{u}^{(0)}\ \right] \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} \\ \hline \mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} \\ \hline \mathbf{u}^{(0)\mathbf{T}} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\ \mathbf{s}^{(0)}C + \mathbf{t}^{(0)}S \ \middle|\ -\mathbf{s}^{(0)}S + \mathbf{t}^{(0)}C \ \middle|\ \mathbf{u}^{(0)}\ \right] \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} \\ \hline \mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} \\ \hline \mathbf{u}^{(0)\mathbf{T}} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}}C + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}}S - \mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}}S + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}}C + \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)\mathbf{T}} =$$

$$= \left(\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}}\right) C + \left(-\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}}\right) S + \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)\mathbf{T}}$$

$\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ sono i versori di una terna ortogonale destra per cui $\begin{cases} \vec{s}\times\vec{t} = \vec{u} \\ \vec{t}\times\vec{u} = \vec{s} \\ \vec{u}\times\vec{s} = \vec{t} \end{cases}$

- Termine $\left(\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)^{\mathbf{T}}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right)$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \ \rightarrow\ \begin{cases} \mathbf{c} = \ \underline{\mathbf{a}}\ \mathbf{b} \\ \underline{\mathbf{c}}\ = -\mathbf{a}\,\mathbf{b}^{\mathbf{T}} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}^{\mathbf{T}} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \vec{s} = \vec{t}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{t} & \rightarrow & \mathbf{s}^{(0)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)} \\ \vec{t} = \vec{u}\times\vec{s} & \rightarrow & \mathbf{t}^{(0)} = \ \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{s}\times\vec{t} = \vec{u} \\ \vec{t}\times\vec{u} = \vec{s} \\ \vec{u}\times\vec{s} = \vec{t} \end{cases}}$$

$$\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} = -\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}} =$$

$$= \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\left(-\mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)\mathbf{T}} + \mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)\mathbf{T}}\right) = \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\left(-\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\right) = -\underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}$$

$$\boxed{\vec{t}\times\vec{s} = -\vec{u}}$$

- Il termine $\left(-\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)^{\mathbf{T}}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right)$ è il prodotto vettoriale $\vec{s}\times\vec{t}$ per cui

$$\left(-\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)^{\mathbf{T}}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right) = \underline{\mathbf{u}}^{(0)}$$

Si ottiene quindi per $\Delta\mathbf{R}^{(0)}$

$$\boxed{\mathbf{I} - \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}} = -\underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}}$$

$$\Delta\mathbf{R}^{(0)} = \left(\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)^{\mathbf{T}}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right) C + \left(-\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)^{\mathbf{T}}} + \mathbf{t}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right) S + \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}} =$$

$$= -\underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}C + \underline{\mathbf{u}}^{(0)}S + \left(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}\right) = \boxed{\mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\sin\alpha + \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}(1-\cos\alpha)}$$

L'espressione esplicita della componente rotatoria $\Delta\mathbf{R}^{(0)}$ è

$$\Delta\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)} \sin\alpha + \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2} (1-\cos\alpha) =$$

$$= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \sin\alpha + \begin{bmatrix} u_x^2-1 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y^2-1 & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_y^2-1 \end{bmatrix} (1-\cos\alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} 1+\left(u_x^2-1\right)(1-\cos\alpha) & -u_z\sin\alpha + u_x u_y (1-\cos\alpha) & u_y\sin\alpha + u_x u_z (1-\cos\alpha) \\ u_z\sin\alpha + u_x u_y (1-\cos\alpha) & 1+\left(u_y^2-1\right)(1-\cos\alpha) & -u_x\sin\alpha + u_y u_z (1-\cos\alpha) \\ -u_y\sin\alpha + u_x u_z (1-\cos\alpha) & u_x\sin\alpha + u_y u_z (1-\cos\alpha) & 1+\left(u_z^2-1\right)(1-\cos\alpha) \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{u}^{(0)}$ il versore dell'asse elicoidale rispetto alla terna **(0)**

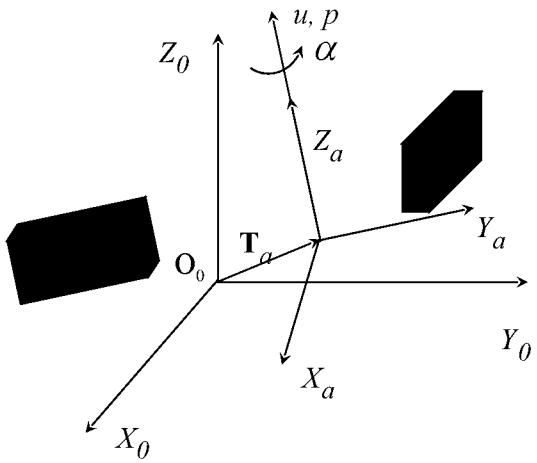
Per la componente di traslazione $\Delta\mathbf{T}^{(0)}$ si ha

$$\Delta\mathbf{T}^{(0)} = -\mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\,\mathbf{T}_a^{(0)} + \mathbf{R}_a\mathbf{H} + \mathbf{T}_a^{(0)} = -\,\Delta\mathbf{R}^{(0)}\mathbf{T}_a^{(0)} + \mathbf{R}_a\mathbf{H} + \mathbf{T}_a^{(0)} =$$

$$= \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\right)\mathbf{T}_a^{(0)} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)} & \mathbf{t}^{(0)} & \mathbf{u}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix} = \boxed{\left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\right)\mathbf{T}_a^{(0)} + h\mathbf{u}^{(0)}}$$

Per ottenere la matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$

- descrivere la rototraslazione rispetto a una terna (0) con
  - asse elicoidale P^*, $\vec{u}$
  - rotazione α
  - passo $p = h/a$ o traslazione h



$$\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \Delta\mathbf{R}^{(0)} & & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

dove

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)} \sin\alpha + \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2} (1-\cos\alpha) \\ \Delta\mathbf{T}^{(0)} = \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\right)\mathbf{T}_a^{(0)} + h\mathbf{u}^{(0)} \end{cases}$$

in cui $\mathbf{T}_a^{(0)}$ rappresenta l'origine della terna **(*a*)**, cioè un punto arbitrario dell'asse elicoidale, rispetto alla terna **(0)**

Estrazione dei Parametri della Rototraslazione dalla Matrice $Q^{(0)}$

L'angolo di rotazione α si ricava dall'espressione di $\Delta\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 + \left(u_x^2 - 1\right)(1 - \cos\alpha) \\ r_{21} &= \quad u_z \sin\alpha + u_x u_y (1 - \cos\alpha) \\ r_{31} &= -u_y \sin\alpha + u_x u_z (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= -u_z \sin\alpha + u_x u_y (1 - \cos\alpha) \\ r_{22} &= 1 + \left(u_y^2 - 1\right)(1 - \cos\alpha) \\ r_{32} &= \quad u_x \sin\alpha + u_y u_z (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \quad u_y \sin\alpha + u_x u_z (1 - \cos\alpha) \\ r_{23} &= -u_x \sin\alpha + u_y u_z (1 - \cos\alpha) \\ r_{33} &= 1 + \left(u_z^2 - 1\right)(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{cases} \sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{(2u_x \sin\alpha)^2 + (2u_y \sin\alpha)^2 + (2u_z \sin\alpha)^2}}{2} \\ \cos\alpha = (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)/2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3 + \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 3\right)(1 - \cos\alpha) - 1}{2} = \dfrac{2 - 2(1 - \cos\alpha)}{2} \end{cases}$$

infine $\longrightarrow$ $\alpha = \operatorname{atan2}(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$

$$\begin{aligned} r_{21} &= \quad u_z \sin\alpha + u_x u_y (1 - \cos\alpha) \\ r_{31} &= -u_y \sin\alpha + u_x u_z (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= -u_z \sin\alpha + u_x u_y (1 - \cos\alpha) \\ r_{32} &= \quad u_x \sin\alpha + u_y u_z (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \quad u_y \sin\alpha + u_x u_z (1 - \cos\alpha) \\ r_{23} &= -u_x \sin\alpha + u_y u_z (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

Le componenti $u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}$ del versore $\vec{u}$ si calcolano per $\sin\alpha \neq 0$

$$u_x^{(0)} = \frac{r_{32} - r_{23}}{2\sin\alpha} \qquad u_y^{(0)} = \frac{r_{13} - r_{31}}{2\sin\alpha} \qquad u_z^{(0)} = \frac{r_{21} - r_{12}}{2\sin\alpha}$$

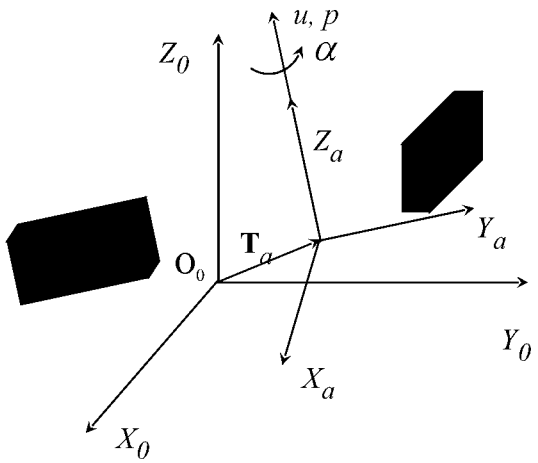
Nel caso in cui $\alpha = \pi$ e $\cos\alpha \neq 1$ ($\alpha = 0$ è banale), si usano le relazioni indicate insieme a quelle dei prodotti che forniscono il segno delle componenti di $\vec{u}$

$$u_x^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{11} - 1}{1 - \cos\alpha} + 1} \qquad u_y^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{22} - 1}{1 - \cos\alpha} + 1} \qquad u_z^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{33} - 1}{1 - \cos\alpha} + 1}$$

$$u_x^{(0)} u_y^{(0)} = \frac{r_{12} + r_{21}}{2(1 - \cos\alpha)} \qquad u_y^{(0)} u_z^{(0)} = \frac{r_{23} + r_{32}}{2(1 - \cos\alpha)} \qquad u_x^{(0)} u_z^{(0)} = \frac{r_{13} + r_{31}}{2(1 - \cos\alpha)}$$

Si hanno 2 soluzioni equivalenti $\begin{cases} \alpha \leftrightarrow \vec{u} \\ -\alpha \leftrightarrow -\vec{u} \end{cases}$

$$\boxed{\Delta\mathbf{T}^{(0)} = \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\right)\mathbf{T}_a^{(0)} + h\mathbf{u}^{(0)}}$$



La traslazione h si ricava dalla relazione $h = \mathrm{u}^{(0)^{\mathrm{T}}}\Delta\mathrm{T}^{(0)}$, infatti

$$\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\Delta\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\right)\mathbf{T}_a^{(0)} + h\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{u}^{(0)} =$$

$$= \underbrace{\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{T}_a^{(0)}}_{\lambda} - \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} + h$$

Il primo termine è la componente λ di $\mathrm{T}_a^{(0)}$ lungo $\vec{u}$. Il secondo termine deve essere ulteriormente elaborato.

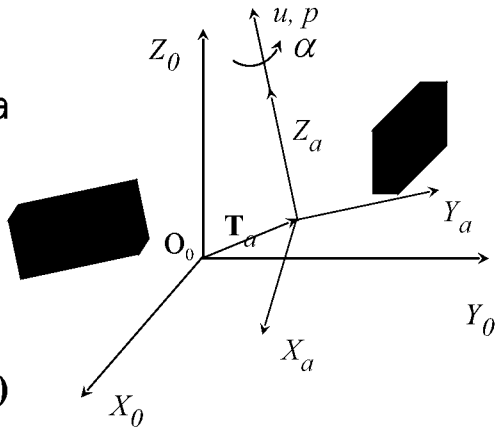
Dalle seguenti matrici si deduce

$$\mathbf{Q}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{za} & & \mathbf{H} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

➡ $\mathbf{R}_{za}$ rappresenta una rotazione di α intorno all'asse $\vec{u}$

$$\mathbf{M}_{0a} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_a & & \mathbf{T}_a^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

➡ $\mathbf{R}_a$ rappresenta l'orientamento di **(*a*)** rispetto a **(0)**



$$\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\Delta\mathbf{T}^{(0)} = \underbrace{\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{T}_a^{(0)}}_{\lambda} - \underbrace{\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{R}_a\mathbf{R}_{za}\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)}}_{} + h$$

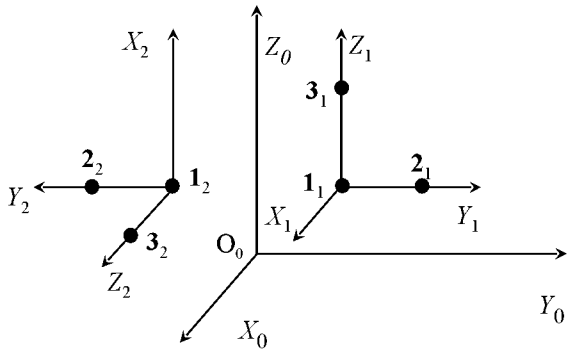
$$\Downarrow$$

$$\mathbf{R}_a^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_a^{(0)} = \mathbf{T}_a^{(a)} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}_{za}\mathbf{T}_a^{(a)} = \mathbf{T}_{a,\alpha}^{(a)} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}_a\mathbf{T}_{a,\alpha}^{(a)} = \mathbf{T}_{a,\alpha}^{(0)} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{T}_{a,\alpha}^{(0)} = \lambda$$

Il punto ${}^3P^*$ che individua insieme a $\vec{u}$ l'asse elicoidale, scegliendo il punto di più vicino all'origine di **(0)**, si calcola con la relazione

$${}^3\mathbf{P}^* = \frac{1}{2\left(1-\cos\alpha\right)}\left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)^{-1}}\right)\Delta\mathbf{T}^{(0)} = \frac{1}{2\left(1-\cos\alpha\right)}\left[\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\sin\alpha - \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}\left(1-\cos\alpha\right)\right]\Delta\mathbf{T}^{(0)}$$

Si vuole determinare la matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$ che descrive rispetto a un sistema di riferimento **(0)** lo spostamento di un corpo tra una posizione



iniziale

$$ {}^{(3)}\mathbf{1}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}\mathbf{2}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}\mathbf{3}_1^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} $$

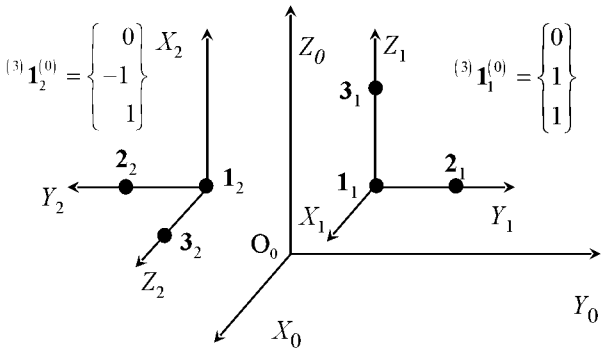
finale

$$ {}^{(3)}\mathbf{1}_2^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}\mathbf{2}_2^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}\mathbf{3}_2^{(0)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} $$

Si consideri una terna solidale al corpo che segue lo spostamento dalla posizione iniziale **(1)** a quella finale **(2)**, con l'origine in $\mathbf{1}_i$ e gli assi diretti come in figura. Indichiamo con **(1)** e **(2)** le terne nelle due posizioni. La matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$ è definita da

$$ \mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{M}_{10} $$

Le matrici di posizione $\mathbf{M}_{10}$ e $\mathbf{M}_{02}$ si scrivono inserendo i punti notevoli delle terne **(1)** e **(2)** rispetto a **(0)**



$$ \mathbf{M}_{02} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

La matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$ risulta $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_2^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{P}_1^{(0)}$

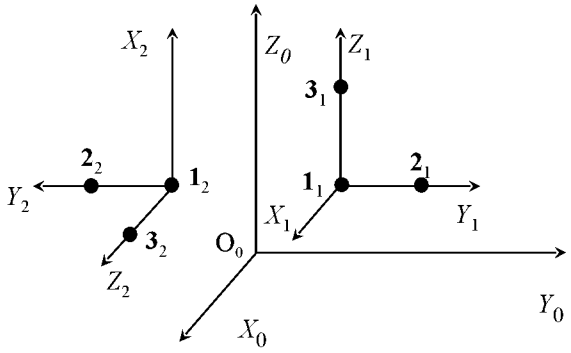
$$ \mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{02}\mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

La matrice $\mathbf{Q}^{(0)}$ ottenuta può essere verificata con la relazione

$$\mathbf{P}_2^{(0)}=\mathbf{Q}^{(0)}\mathbf{P}_1^{(0)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Estrazione dei Parametri della Rototraslazione

$$\boxed{\mathbf{\Delta R}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

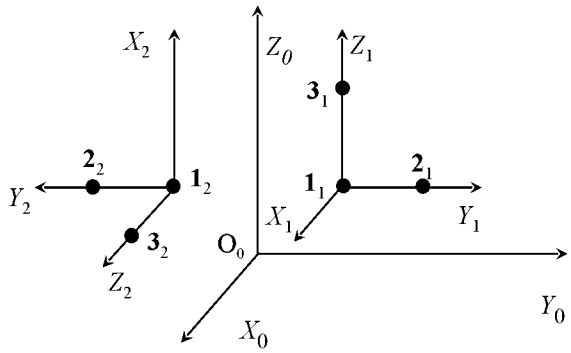


Angolo di Rotazione α

Dalla $\mathbf{Q}^{(0)}$ si estraggono i parametri della rototraslazione elicoidale

$$\begin{cases} \sin\alpha = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(r_{32}-r_{23})^2+(r_{31}-r_{13})^2+(r_{21}-r_{12})^2} = \\ \qquad = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2+(1-1)^2+(0-0)^2} = 0 \\ \cos\alpha = (r_{11}+r_{22}+r_{33}-1)/2 = \dfrac{0-1+0-1}{2} = -1 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = \pm\pi}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(0)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$



Componenti del versore $\rightarrow u_x\, u_y\, u_z$

$$u_x^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{11}-1}{1-\cos\alpha}+1} = \pm\sqrt{\frac{0-1}{1-(-1)}+1} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

È necessario usare le espressioni valide per $\sin\alpha=0$ e $\cos\alpha\neq 1$

$$u_y^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{22}-1}{1-\cos\alpha}+1} = \pm\sqrt{\frac{-1-1}{1-(-1)}+1} = 0$$

$$u_z^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{r_{33}-1}{1-\cos\alpha}+1} = \pm\sqrt{\frac{0-1}{1-(-1)}+1} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per valutare il segno di $u_x\, u_y\, u_z$ si considera il prodotto

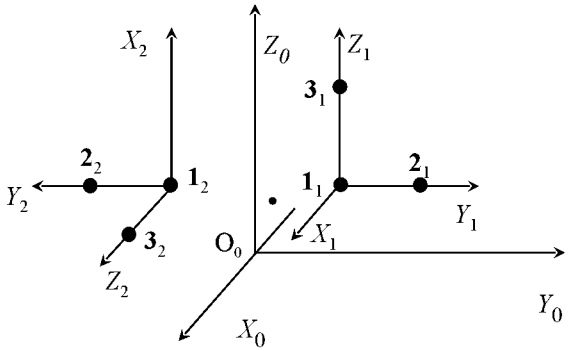
$$u_x^{(0)}u_z^{(0)} = \frac{r_{13}+r_{31}}{2\,(1-\cos\alpha)} = \frac{1+1}{2\,[1-(-1)]} = \frac{1}{2} > 0$$

Si sceglie il valore positivo per entrambi: $u^{(0)}=\{\sqrt{2}/2 \quad 0 \quad \sqrt{2}/2\}^{\mathrm{T}}$.

L'asse elicoidale è normale a $Y^{(0)}$ e parallelo alla bisettrice $X^{(0)}O_0Z^{(0)}$.

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}} = \left\{\sqrt{2}/2 \;\; 0 \;\; \sqrt{2}/2\right\}$$



Traslazione $\rightarrow h$

$$h = \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}} \Delta\mathbf{T}^{(0)} = \left\{ \sqrt{2}/2 \quad 0 \quad \sqrt{2}/2 \right\} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} = 0$$

Lo spostamento è una rotazione $\rightarrow$ $p = h/\alpha = 0$

Punto dell'Asse Elicoidale $\rightarrow$ $^3\mathbf{P}^* = \dfrac{1}{2\left(1-\cos\alpha\right)} \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)} - 1\right) \Delta\mathbf{T}^{(0)}$

$$^3\mathbf{P}^* = \frac{1}{2\left[1-(-1)\right]} \left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \right) \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{array} \right\}$$

Definizione della matrice L

Dall'espressione della matrice di rototraslazione per spostamenti finiti

$$\mathbf{Q}^{(0)}\left(\Delta\alpha\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} & \Delta\mathbf{R}^{(0)} & & \Delta\mathbf{T}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

con

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}^{(0)}\left(\Delta\alpha\right) = \mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)} \sin\left(\Delta\alpha\right) + \underline{\mathbf{u}}^{(0)^2} \left(1 - \cos\left(\Delta\alpha\right)\right) \\ \Delta\mathbf{T}^{(0)} = \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\left(\Delta\alpha\right)\right) \; ^3\mathbf{P}^{*(0)} + \Delta h\, \mathbf{u}^{(0)} \rightarrow \Delta h = p\Delta\alpha \end{cases}$$

in cui con $^3\mathbf{P}^{*(0)}$ è un punto dell'asse elicoidale in coordinate cartesiane rispetto a (0).

Per $\Delta\alpha \rightarrow d\alpha$ si ha

$$\boxed{\sin\left(\Delta\alpha\right) \;\rightarrow\; \sin\left(d\alpha\right) \cong d\alpha} \quad \boxed{\cos\left(\Delta\alpha\right) \;\rightarrow\; \cos\left(d\alpha\right) \cong 1} \quad \boxed{\Delta h \rightarrow \; dh = pd\alpha}$$

quindi

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}^{(0)}\left(\Delta\alpha\right) \;\rightarrow\; \Delta\mathbf{R}^{(0)}\left(d\alpha\right) = \mathbf{I} + \underline{\mathbf{u}}^{(0)} d\alpha \\ \Delta\mathbf{T}^{(0)} \;\rightarrow\; d\mathbf{T}^{(0)} = \left(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}^{(0)}\left(d\alpha\right)\right) \; ^3\mathbf{P}^{*(0)} + dh\mathbf{u}^{(0)} = \left(-\underline{\mathbf{u}}^{(0)} \; ^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)}\right) d\alpha \end{cases}$$

La matrice di rototraslazione tende a $\mathbf{Q}^{(0)}(\Delta\alpha) \rightarrow \mathbf{Q}^{(0)}(d\alpha)$

$$\mathbf{Q}^{(0)}(d\alpha) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 + \underline{\mathbf{u}}^{(0)} d\alpha & \left(-\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)}\right) d\alpha \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] =$$

Spostamento del punto inizialmente in (0)

$$= \mathbf{I}_4 + \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} & -\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] d\alpha = \boxed{\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(0)} d\alpha}$$

con $$\boxed{\mathbf{L}^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} & -\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} & \mathbf{t}^{(0)} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right]}$$

La matrice $\mathbf{L}^{(0)}$ è detta matrice dell'asse elicoidale del movimento

in quanto $\rightarrow$
- $\underline{\mathbf{u}}^{(0)}$ o $\mathbf{u}^{(0)}$ rappresentano il versore dell'asse
- ${}^3\mathbf{P}^{*(0)}$ rappresenta la posizione dell'asse
- p rappresenta il passo dell'elica

Inoltre il prodotto $\mathbf{t}\, d\alpha$ fornisce lo spostamento infinitesimo del punto del corpo inizialmente sovrapposto a $\boldsymbol{O}_0$.

Estrazione dei parametri dell'asse elicoidale da $L^{(0)}$

Dalla $\mathbf{L}^{(0)}$ si calcolano i parametri dell'asse elicoidale rispetto a **(0)**

$$\mathbf{L}^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} & \mathbf{t}^{(0)} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} & -\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right]$$

Componenti di $\vec{u}$ $\rightarrow$ $\boxed{\underline{u}^{(0)}}$ nella parte di rotazione

Punto ${}^3\mathbf{P}^*$ $\rightarrow$ $\boxed{{}^3\mathbf{P}^{*(0)} = \underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)} + \lambda\mathbf{u}^{(0)}}$

- se $\lambda = 0$
- ${}^3\mathbf{P}^{*(0)}$ — punto più vicino all'origine

$$\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{t}^{(0)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(0)^2}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\,\underbrace{\left(\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)}\right)}_{\vec{u}\times\vec{u}} =$$

$$\boxed{\mathbf{I} - \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = -\underline{\mathbf{u}}^2}$$

$$= \left(\mathbf{I} - \mathbf{u}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\right)\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} = {}^3\,\mathbf{P}^{*(0)} - \mathbf{u}^{(0)}\underbrace{\left(\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)}\right)}_{\lambda}$$

passo p $\rightarrow$ $\boxed{p = \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{t}^{(0)}}$

$$= -\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p\mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{u}}^{(0)^{\mathbf{T}}}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p = \left(\underline{\mathbf{u}}^{(0)}\mathbf{u}^{(0)}\right)^{\mathbf{T}}\,{}^3\mathbf{P}^{*(0)} + p$$

Cambio di riferimento per la matrice L

La matrice dell'asse elicoidale $\mathbf{L}^{(0)}$ dà la descrizione dell'asse elicoidale nel sistema di riferimento **(0)**. È quindi utile trovare le relazioni per passare da un riferimento all'altro.

Per la matrice di rototraslazione $\mathbf{Q}^{(0)}$ esiste la relazione

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{M}_{0k}\mathbf{Q}^{(k)}\mathbf{M}_{k0}$$

Nel caso di rototraslazioni infinitesime si scrive

$$\mathbf{Q}^{(i)}\left(d\alpha\right) = \mathbf{I} + \mathbf{L}^{(i)}d\alpha$$

Sostituendo si ottiene

$$\mathbf{Q}^{(0)}\left(d\alpha\right) = \mathbf{M}_{0k}\ \mathbf{Q}^{(k)}\left(d\alpha\right)\ \mathbf{M}_{k0} \quad \leftarrow \quad \mathbf{Q}\left(d\alpha\right) = \mathbf{I} + \mathbf{L}d\alpha$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(0)}d\alpha = \mathbf{M}_{0k}\ \left(\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(k)}d\alpha\right)\ \mathbf{M}_{k0} = \mathbf{M}_{0k}\ \mathbf{I}\ \mathbf{M}_{k0} + \mathbf{M}_{0k}\ \mathbf{L}^{(k)}\mathbf{M}_{k0}\, d\alpha$$

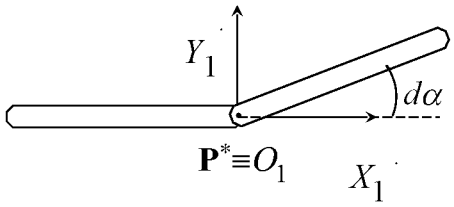
$$\mathbf{L}^{(0)} = \mathbf{M}_{0k}\ \mathbf{L}^{(k)}\ \mathbf{M}_{k0}$$

Esempio di calcolo della matrice $L^{(K)}$

Per due corpi connessi da una coppia rotoidale si vuole calcolare $\mathbf{L}^{(k)}$

Asse elicoidale $\longrightarrow$ $\begin{cases} {}^3\mathbf{P}^*,\ \vec{u} \\ p = 0 \end{cases}$

Ampiezza del movimento $\longrightarrow$ $d\alpha$

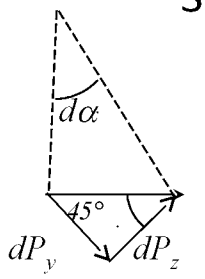


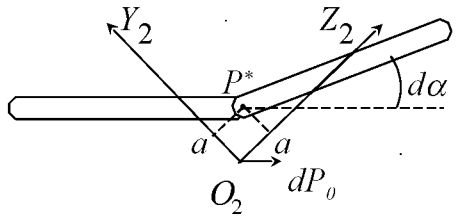
Sistema di riferimento **(1)** con Z_1 uscente dal foglio

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}^{(1)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(1)}\,{}^3\mathbf{P}^{*(1)} + p\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{t}^{(1)}d\alpha \ \rightarrow \ \text{spostamento di } O_1 \end{cases}$$

La matrice dello asse elicoidale è $\longrightarrow$ $\mathbf{L}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\mathbf{u}}^{(1)} & & \mathbf{t}^{(1)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Sistema di riferimento **(2)** con X_2 entrante nel foglio





$$\mathbf{P}^{*(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{Bmatrix} \qquad \boxed{p=0}$$

$$\begin{cases} dP_0 = \sqrt{2}a d\alpha \\ d\mathbf{P}_{0x}^{(2)} = 0,\ d\mathbf{P}_{0y}^{(2)} = -\sqrt{2}a d\alpha \sin(45°) = -a d\alpha,\ d\mathbf{P}_{0z}^{(2)} = \sqrt{2}a d\alpha \cos(45°) = a d\alpha \end{cases}$$

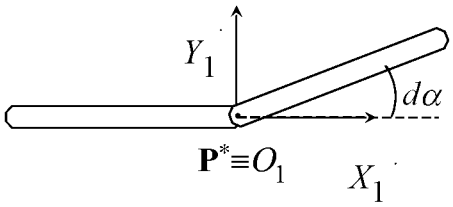
$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}^{(2)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(2)}\mathbf{P}^{*(2)} + p\mathbf{u}^{(2)} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{Bmatrix} \leftrightarrow \quad \mathbf{t}^{(2)} d\alpha \end{cases}$$

spostamento di O_2

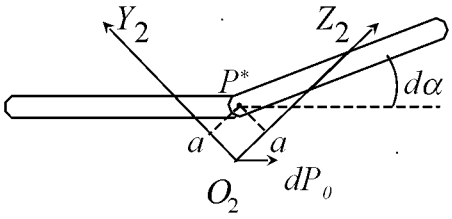
Matrice dell'asse elicoidale $\longrightarrow$ $\mathbf{L}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\mathbf{u}}^{(2)} & & \mathbf{t}^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Cambiamento di riferimento **(1) → (2)**

$$\mathbf{P}^{*(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{P}^{*(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{Bmatrix}$$



Calcolando $\mathbf{M}_{21}$ e $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^{-1}$ si può verificare $\longrightarrow$ $\mathbf{L}^{(2)} = \mathbf{M}_{21}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{M}_{12}$

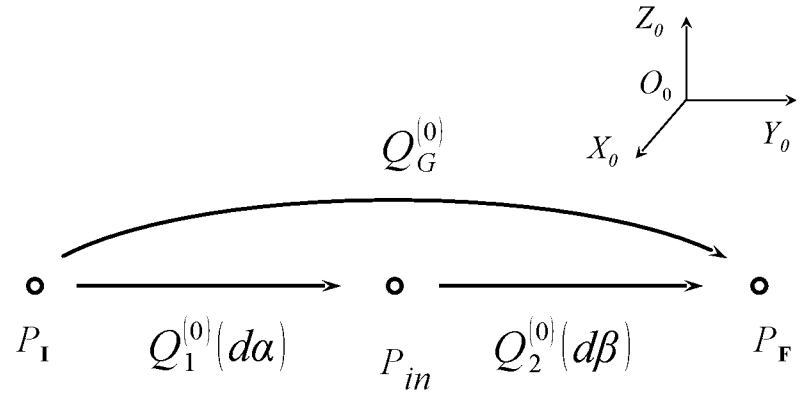
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & a \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}a \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

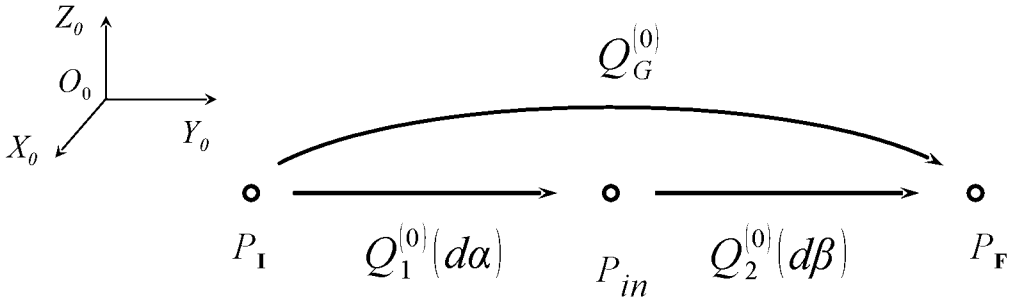
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composizione di rototraslazioni infinitesime

Le rototraslazioni infinitesime successive si compongono in modo analogo agli spostamenti finiti. Consideriamo una sequenza di rototraslazioni: se una rototraslazione infinitesima da una

- posizione iniziale $P_{\mathbf{I}}$ a una
- posizione finale $P_{\mathbf{F}}$, è descritta con 2 rototraslazioni attraverso una
- posizione intermedia P_{in}, lo spostamento infinitesimo $P_{\mathbf{I}} \rightarrow P_{\mathbf{F}}$ si descrive con la
- rototraslazione globale $Q_G^{(0)}$





Il risultato, come noto, è

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{Q}_2^{(0)}(d\beta)\,\mathbf{Q}_1^{(0)}(d\alpha) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{L}_2^{(0)} d\beta\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1^{(0)} d\alpha\right) =$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{L}_1^{(0)} d\alpha + \mathbf{L}_2^{(0)} d\beta + \mathbf{L}_1^{(0)}\mathbf{L}_2^{(0)} d\alpha\, d\beta$$

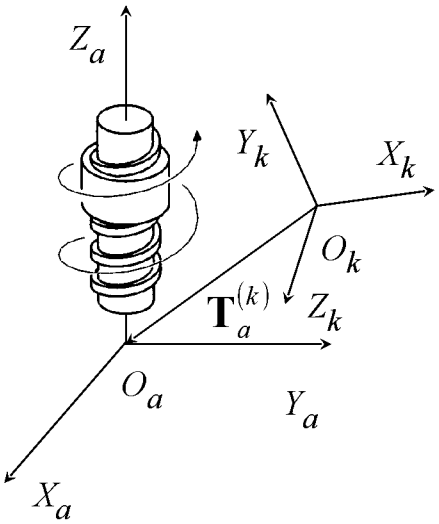
che, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, diviene

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{(0)} = \mathbf{I} + \mathbf{L}_1^{(0)} d\alpha + \mathbf{L}_2^{(0)} d\beta}$$

Osservando la precedente espressione si deduce che le rototraslazioni infinitesime sono commutabili

$$\mathbf{Q}_2^{(0)}(d\beta)\,\mathbf{Q}_1^{(0)}(d\alpha) = \mathbf{Q}_1^{(0)}(d\alpha)\,\mathbf{Q}_2^{(0)}(d\beta) + o(d\alpha, d\beta)$$

$\mathbf{L}$ rappresenta l'asse elicoidale $\longrightarrow$ $\vec{u},\ {}^3\mathbf{P}^*,\ p(0)$



$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\mathbf{u}} & & \mathbf{t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\mathbf{t} = -\underline{\mathbf{u}}\,{}^3\mathbf{P}^* + p\mathbf{u}$

$\mathbf{t}\,d\alpha$ spostamento del punto sovrapposto all'origine

- la sua espressione si semplifica quando si sceglie una terna con un asse coordinato coincidente con l'asse elicoidale
- sistema di riferimento (a) $\rightarrow$ $\vec{z}_a \equiv \vec{u}$

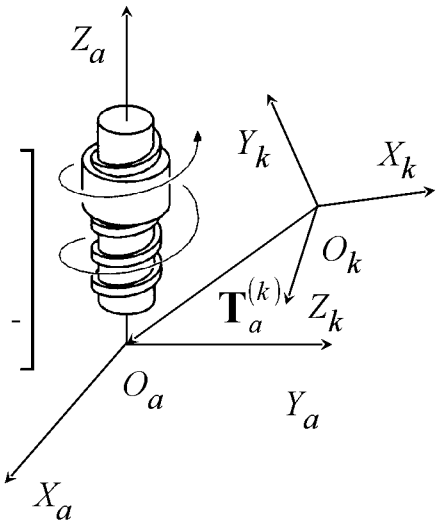
Prismatico $\rightarrow$ $\mathbf{L}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\mathbf{L}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\mathbf{z}}_a^{(a)} & & \mathbf{t}^{(a)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rotoidale $\rightarrow$ $\mathbf{L}^{(a)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

- sistema di riferimento (k) qualsiasi

$$\mathbf{L}^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\mathbf{z}}_a^{(k)} & & \mathbf{t}^{(k)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -z_{za}^{(k)} & z_{ya}^{(k)} & \\ z_{za}^{(k)} & 0 & -z_{xa}^{(k)} & -\underline{\mathbf{z}}_a^{(k)}\,\mathbf{T}_a^k + p\mathbf{z}_a^{(k)} \\ -z_{ya}^{(k)} & z_{xa}^{(k)} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

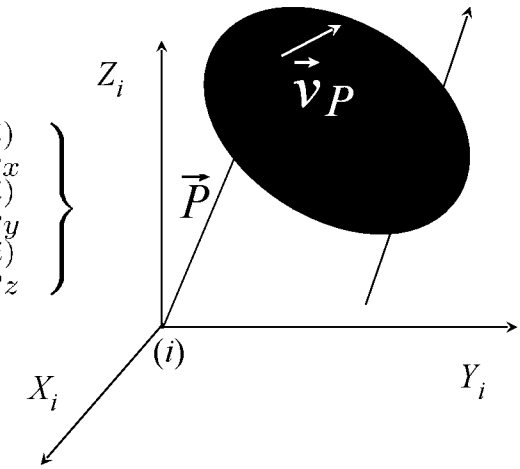


Rotoidale $\rightarrow$ $\mathbf{L}^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -z_{za}^{(k)} & z_{ya}^{(k)} & \\ z_{za}^{(k)} & 0 & -z_{xa}^{(k)} & -\underline{\mathbf{z}}_a^{(k)}\mathbf{T}_a^{(k)} \\ -z_{ya}^{(k)} & z_{xa}^{(k)} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Prismatico $\rightarrow$ $\mathbf{L}^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & z_{xa}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & z_{ya}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & z_{za}^{(k)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

La distribuzione della velocità di un corpo può essere ottenuta derivando rispetto al tempo la posizione. Rispetto a un sistema di riferimento (***i***) si ha

- Punto materiale **P**
  - Posizione $\longrightarrow$ $^3\mathbf{P}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{c} x_P^{(i)} \\ y_P^{(i)} \\ z_P^{(i)} \end{array} \right\}$
  - Velocità $\longrightarrow$ $^3\dot{\mathbf{P}}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_P^{(i)} \\ \dot{y}_P^{(i)} \\ \dot{z}_P^{(i)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} v_{Px}^{(i)} \\ v_{Py}^{(i)} \\ v_{Pz}^{(i)} \end{array} \right\}$
- Corpo rigido **R**
  - Posizione $\longrightarrow$ $\mathbf{M}_{i\mathbf{R}}$
  - Velocità $\longrightarrow$ $\dfrac{d\mathbf{M}_{i\mathbf{R}}}{dt}$



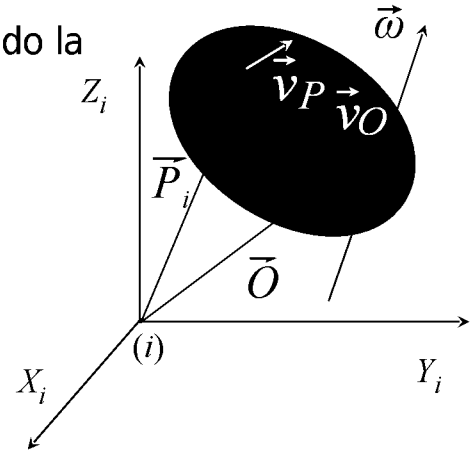
Questa scelta <u>non</u> costituisce la soluzione più conveniente

Matrice di velocità

La velocità di un punto generico P del corpo è, secondo la formula fondamentale della cinematica,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare
- O è il polo, punto arbitrario solidale al corpo
- $\vec{v}_O$ è la velocità del polo



Rispetto a un sistema di riferimento (***i***) si scrive in forma matriciale

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \qquad \rightarrow \qquad {}^3\mathbf{V}_P^{(i)} = {}^3\,\mathbf{V}_O^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} \left[{}^3\mathbf{P}_i^{(i)} - {}^3\,\mathbf{O}^{(i)} \right]$$

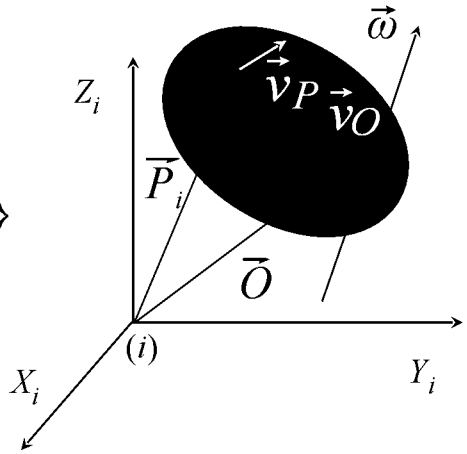
Scegliendo come polo il punto del corpo che nell'istante considerato si trova sovrapposto all'origine del riferimento (***i***) si ha

$$^3\mathbf{O}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad {}^3\mathbf{V}_P^{(i)} = {}^3\,\mathbf{V}_O^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}\ {}^3\mathbf{P}_i^{(i)}$$

Esplicitando le matrici si ha

$$ {}^3\mathbf{V}_P^{(i)} = {}^3\mathbf{V}_O^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}\ {}^3\mathbf{P}_i^{(i)} $$

$$ \begin{Bmatrix} V_{Px}^{(i)} \\ V_{Py}^{(i)} \\ V_{Pz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{Ox}^{(i)} \\ V_{Oy}^{(i)} \\ V_{Oz}^{(i)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^{(i)} \\ y_P^{(i)} \\ z_P^{(i)} \end{Bmatrix} $$



In coordinate omogenee si ha

$$ \begin{Bmatrix} V_{Px}^{(i)} \\ V_{Py}^{(i)} \\ V_{Pz}^{(i)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_P^{(i)} \\ \dot{y}_P^{(i)} \\ \dot{z}_P^{(i)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{Ox}^{(i)} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{Oy}^{(i)} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{Oz}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^{(i)} \\ y_P^{(i)} \\ z_P^{(i)} \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\mathbf{P}_i^{(i)} $$

La velocità di un generico punto si ottiene moltiplicando la posizione per la matrice $\mathbf{W}^{(i)}$ che descrive la distribuzione di velocità $\rightarrow$ $\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\mathbf{P}_i^{(i)}$

La matrice di velocità $\mathbf{W}^{(i)}$

- ha la struttura $\mathbf{W}^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{Ox}^{(i)} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{Oy}^{(i)} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{Oz}^{(i)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} & & {}^3\mathbf{V}_O^{(i)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
  - $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}$ rappresentazione SS(3) della velocità angolare
  - $\mathbf{V}_O^{(i)}$ velocità del polo del corpo
- dipende dal sistema di riferimento
  - $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)}$ è la descrizione SS(3) rispetto a ***(i)*** della velocità angolare
  - $\mathbf{V}_O^{(i)}$ è la velocità del punto del corpo sovrapposto all'origine di ***(i)***, descritta rispetto a ***(i)***

Cambio di riferimento per la matrice $W^{(i)}$

Si considerino due sistemi di riferimento ***(i)*** e ***(j)***: si desidera trovare la relazione tra $\mathbf{W}^{(i)}$ e $\mathbf{W}^{(j)}$

- Si assume che i sistemi ***(i)*** e ***(j)*** non sono in moto relativo
- Nel sistema di riferimento ***(i)*** si scrive $\longrightarrow$ $\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\mathbf{P}_i^{(i)}$
- Nel sistema di riferimento ***(j)*** si scrive $\longrightarrow$ $\dot{\mathbf{P}}_j^{(j)} = \mathbf{W}^{(j)}\mathbf{P}_j^{(j)}$
- Deve esistere una relazione tra $\mathbf{W}^{(i)}$ e $\mathbf{W}^{(j)}$ poiché rappresentano lo stesso moto nei due diversi riferimenti ***(i)*** e ***(j)*** tra loro solidali

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_j^{(j)} = \mathbf{W}^{(j)}\mathbf{P}_j^{(j)} \\ \mathbf{P}_j^{(j)} = \mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)} \\ \dot{\mathbf{P}}_j^{(j)} = \mathbf{M}_{ji}\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} \end{cases} \longleftarrow \quad \frac{d\mathbf{P}_j^{(j)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)}\right) = \mathbf{M}_{ji}\frac{d\mathbf{P}_i^{(i)}}{dt}$$

Costante in quanto ***(i)*** e ***(j)*** non sono in moto relativo

- Sostituendo la 2ª e la 3ª nella 1ª $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_j^{(j)} = \mathbf{W}^{(j)}\mathbf{P}_j^{(j)} \\ \mathbf{P}_j^{(j)} = \mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)} \\ \dot{\mathbf{P}}_j^{(j)} = \mathbf{M}_{ji}\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} \end{cases}$ si ha

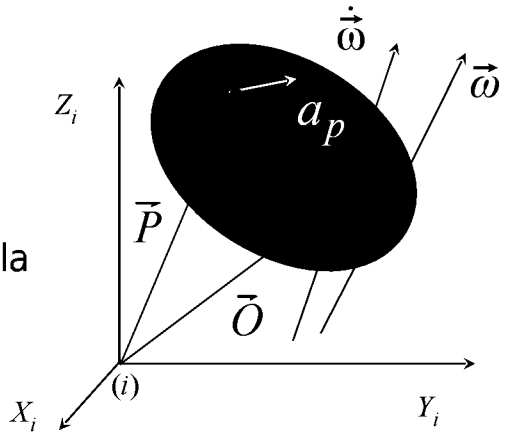
$$\mathbf{M}_{ji}\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(j)}\mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)}$$

$$\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{M}_{ji}^{-1}\mathbf{W}^{(j)}\mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)} = \mathbf{M}_{ij}\mathbf{W}^{(j)}\mathbf{M}_{ji}\mathbf{P}_i^{(i)}$$

- Confrontando la precedente con $\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\mathbf{P}_i^{(i)}$ si ottiene la regola per il cambiamento del riferimento tra i due sistemi di riferimento ***(i)*** e ***(j)*** non in moto relativo tra di loro

$$\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{M}_{ij}\mathbf{W}^{(j)}\mathbf{M}_{ji}$$

La distribuzione dell'accelerazione di un corpo si ricava partendo dalla distribuzione della velocità



- Si deriva rispetto al tempo l'espressione vettoriale della velocità riferita al sistema di riferimento ***(i)***

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right)$$

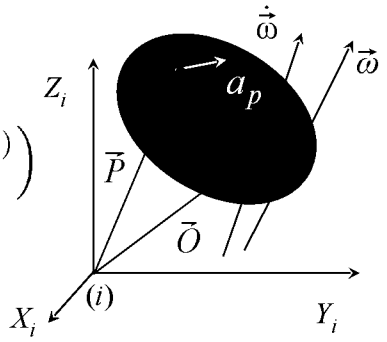
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_p}_{\vec{a}_p} = \frac{d}{dt}\vec{v}_o + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right)\right] = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_o}_{\vec{a}_O} + \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{\omega}}_{\dot{\vec{\omega}}} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right) + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{P} - \vec{O}\right)}_{(\vec{v}_p - \vec{v}_o) = \vec{\omega} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right)}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right) + \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right)\right]$$

- L'accelerazione del corpo è nota quando sono note
  - l'accelerazione del polo O $\rightarrow$ $\vec{a}_O$
  - l'accelerazione angolare $\rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}}$
  - la velocità angolare $\rightarrow$ $\vec{\omega}$

Matrice di accelerazione

- In forma matriciale si scrive rispetto la terna ***(i)***



$$^3\mathbf{A}_p^{(i)} = {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} + \underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} \left({}^3\mathbf{P}_i^{(i)} - {}^3\mathbf{O}_i^{(i)}\right) + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)^2} \left({}^3\mathbf{P}_i^{(i)} - {}^3\mathbf{O}_i^{(i)}\right)$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right) + \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{P} - \vec{O}\right)\right]$$

Scegliendo come polo il punto del corpo sovrapposto all'origine di (i)

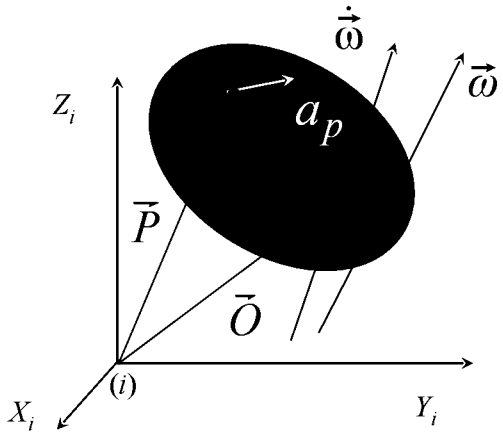
$$^3\mathbf{A}_p^{(i)} = {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} + \underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)}\, {}^3\mathbf{P}_i^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)^2} {}^3\mathbf{P}_i^{(i)} = {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} + \left(\underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)^2}\right) {}^3\mathbf{P}_i^{(i)}$$

Ponendo $\mathbf{G}^{(i)} = \left(\underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)^2}\right)$ $\rightarrow$ $\boxed{^3\mathbf{A}_p^{(i)} = {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} + \mathbf{G}^{(i)}\, {}^3\mathbf{P}_i^{(i)}}$

- In coordinate omogenee si scrive $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)}\, \mathbf{P}_i^{(i)}}$

$$\begin{Bmatrix} a_{px} \\ a_{py} \\ a_{pz} \\ \hline 0 \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{z}_p \\ \hline 0 \end{Bmatrix}^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^2 & & \begin{matrix} a_{ox} \\ a_{oy} \\ a_{oz} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^{(i)} \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ \hline 1 \end{Bmatrix}^{(i)}$$

- L'accelerazione di un generico punto si ottiene moltiplicando la posizione per la matrice $\mathbf{H}^{(i)}$ che descrive la distribuzione di accelerazione
- La matrice $\mathbf{H}^{(i)}$ di accelerazione ha la struttura

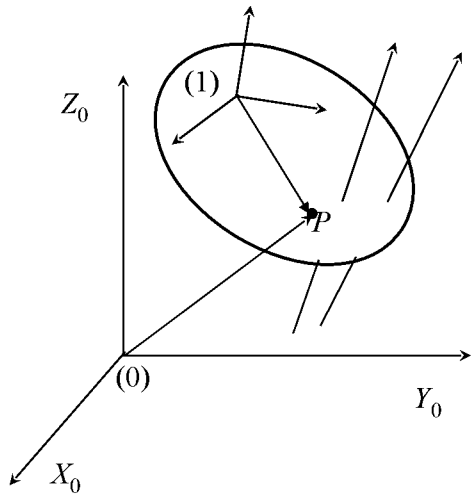


$$\mathbf{H}^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\dot{\omega}}^{(i)} + \underline{\omega}^{(i)2} & & {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{G}^{(i)} = \underline{\dot{\omega}}^{(i)} + \underline{\omega}^{(i)2}$$

- $\mathbf{H}^{(i)}$ dipende da (i): la relazione del cambio del sistema di riferimento si trova in modo analogo al caso della matrice $\mathbf{W}^{(i)}$

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{M}_{ij}\mathbf{H}^{(j)}\mathbf{M}_{ji}$$

Considerando che le matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{H}$ rappresentano rispettivamente posizione, velocità e accelerazione di un corpo rigido, cerchiamo le relazioni che le legano

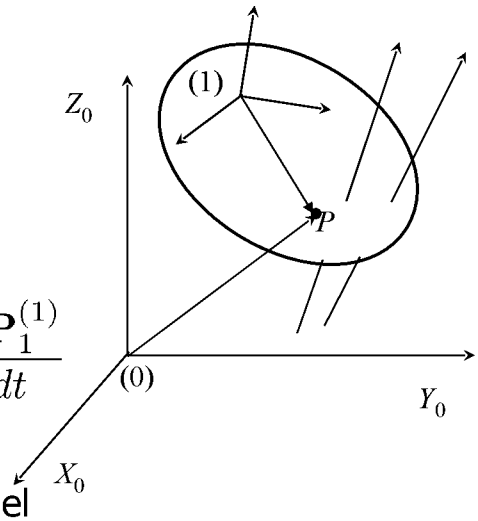


Si consideri

- Un corpo in movimento nello spazio
- **(0)** $\rightarrow$ è la terna per la descrizione del moto
- **(1)** $\rightarrow$ è la terna solidale al corpo
- P $\rightarrow$ è un punto generico del corpo
- $\vec{P}_0$ e $\vec{P}_1$ $\rightarrow$ sono i vettori che individuano P nei riferimenti **(0)** e **(1)**
- La relazione tra $\mathbf{P}_0^{(0)}$ e $\mathbf{P}_1^{(1)}$ è $\rightarrow$ $\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}$

Relazione tra W e M_{01}

Tra la matrice $\mathbf{M}_{01}$ che descrive la posizione e la matrice $\mathbf{W}^{(0)}$ che descrive la velocità deve esistere una relazione



- derivata rispetto al tempo di $\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_0^{(0)} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}\right) = \frac{d\,\mathbf{M}_{01}}{dt}\mathbf{P}_1^{(1)} + \mathbf{M}_{01}\frac{d\,\mathbf{P}_1^{(1)}}{dt}$$

il punto P fa parte del corpo, quindi $\mathbf{P}_1^{(1)}$ non varia nel tempo; essendo $\mathbf{P}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{10}\mathbf{P}_0^{(0)}$ si ha

$$\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10}\,\mathbf{P}_0^{(0)}$$

- dal confronto con la definizione di matrice $\mathbf{W}^{(0)}$ delle velocità si ha

$$\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \mathbf{W}^{(0)}\,\mathbf{P}_0^{(0)} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10}\,\mathbf{P}_0^{(0)}$$

$$\boxed{\mathbf{W}^0 = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}}$$

Relazione tra $W^{(i)}$ e $H^{(i)}$

Ovviamente esiste una relazione tra le matrici di velocità e di accelerazione

$$\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)}, \quad \ddot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)}$$

$$\mathbf{H}^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\dot{\omega}}^{(i)} + \underline{\omega}^{(i)2} & {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} \\ \hline \bar{0}\ \bar{0}\ \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right]$$

- La relazione tra le matrici di accelerazione $\mathbf{H}^{(i)}$ e di velocità $\mathbf{W}^{(i)}$ si trova derivando rispetto al tempo l'espressione della velocità

$$\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{W}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)}\right)$$

$$\boxed{\ddot{\mathbf{P}}_i^{(i)}} = \dot{\mathbf{W}}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)} + \mathbf{W}^{(i)}\dot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \boxed{\dot{\mathbf{W}}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)} + \mathbf{W}^{(i)}\left(\mathbf{W}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)}\right)}$$

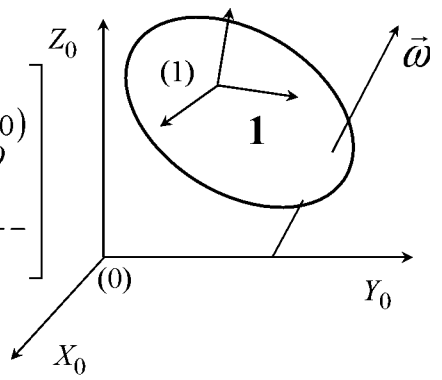
- Confrontando la precedente con l'espressione dell'accelerazione si ha

$$\ddot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)}\,\mathbf{P}_i^{(i)} \;\leftrightarrow\; \ddot{\mathbf{P}}_i^{(i)} = \left(\dot{\mathbf{W}}^{(i)} + \mathbf{W}^{(\mathrm{i})2}\right)\,\mathbf{P}_i^{(i)} \longrightarrow \boxed{\mathbf{H}^{(i)} = \dot{\mathbf{W}}^{(\mathrm{i})} + \mathbf{W}^{(\mathrm{i})2}}$$

Velocità angolare $\underline{\omega}$ e R

La matrice di velocità $\mathbf{W}^{(i)}$ ha la struttura

$$\mathbf{W}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_{Ox}^{(0)} \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_{Oy}^{(0)} \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_{Oz}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} & & {}^{3}\mathbf{V}_{O}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$



- $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$ rappresentazione SS(3) della **velocità angolare** di **1** rispetto a **(0)**
- dalla relazione tra la matrice $\mathbf{M}_{01}$ e la matrice $\mathbf{W}^{(0)}$

$$\mathbf{W}^{(0)} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{M}_{10} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

- si ricava

$$\mathbf{W}^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} & {}^{3}\mathbf{V}_{O}^{(0)} \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \dot{\mathbf{R}}_{01} & \dot{\mathbf{T}}_{01} \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} & -\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}_{01} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \dot{\mathbf{R}}_{01}\mathbf{R}_{01}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{R}}_{01}\mathbf{R}_{10}}$$

Relazione tra H e $\mathbf{M}_{01}$

- essendo la terna **(1)** solidale al corpo, la **derivata seconda** rispetto al tempo è

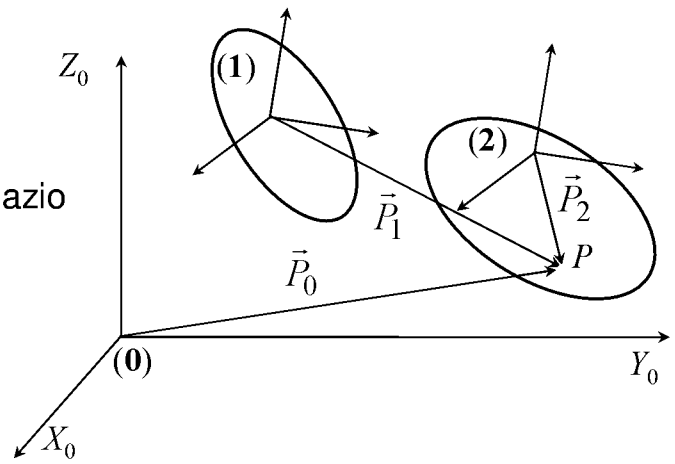
$$\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} \qquad \ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)} = \ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10}\mathbf{P}_0^{(0)}$$

- dal **confronto** con la definizione di matrice $\mathbf{H}^{(0)}$ delle accelerazioni si ha

$$\ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \mathbf{H}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)} \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10}\mathbf{P}_0^{(0)}$$

$$\boxed{\mathbf{H}^{(0)} = \ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{10} = \ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}}$$

- Lo stesso risultato per $\mathbf{W}^{(0)}$ e $\mathbf{H}^{(0)}$ si ottiene con un procedimento diverso
  - $\mathbf{M}_{01}$ contiene i punti notevoli della terna **(1)** rispetto alla terna **(0)**
  - applicando a ciascun punto notevole $\rightarrow$ $\dot{\mathbf{P}}^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)}\mathbf{P}^{(i)}$, $\ddot{\mathbf{P}}^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)}\mathbf{P}^{(i)}$
  - raggruppando $\rightarrow$ $\dot{\mathbf{M}}_{01} = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{M}_{01}$, $\ddot{\mathbf{M}}_{01} = \mathbf{H}^{(0)}\mathbf{M}_{01}$
- $\mathbf{M}_{01}$ dipende da **(0)** e **(1)** , $\mathbf{W}^{(0)}$ e $\mathbf{H}^{(0)}$ **dipendono dal sistema (0)** e **dal moto del corpo**, ma **non dipendono dal posizionamento della terna (1)**



Si considerino

- i corpi **1** e **2** in movimento nello spazio
- **(1)** → terna solidale al corpo **1**
- **(2)** → terna solidale al corpo **2**
- **(0)** → terna per la descrizione del moto
- P → punto generico del corpo **2**
- $\mathbf{W}_{01}$ e $\mathbf{H}_{01}$ → matrici di velocità e accelerazioni di **(1)** rispetto a **(0)**
- $\mathbf{W}_{02}$ e $\mathbf{H}_{02}$ → matrici di velocità e accelerazioni di **(2)** rispetto a **(0)**
- $\mathbf{W}_{12}$ e $\mathbf{H}_{12}$ → matrici di velocità e accelerazioni di **(2)** rispetto a **(1)**
- Sussistono le relazioni

$$\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{P}_1^{(1)}, \quad \mathbf{P}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}$$

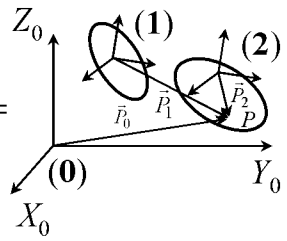
Composizione delle velocità

- **Derivando** rispetto al tempo l'espressione → $\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}$ si ha

$$\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12}\right)\mathbf{P}_2^{(2)} \quad \leftarrow \quad \mathbf{P}_2^{(2)}\text{costante}$$

- Introducendo alcune **matrici identità** del tipo → $\mathbf{M}_{ij}^{-1}\mathbf{M}_{ij}$ si ha

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} &= \left[\dot{\mathbf{M}}_{01}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right)\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12}\left(\mathbf{M}_{12}^{-1}\mathbf{M}_{12}\right)\right]\mathbf{P}_2^{(2)} = \\
&= \left[\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right)\mathbf{M}_{12}\right]\mathbf{P}_2^{(2)} = \\
&= \Big(\underbrace{\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}}_{\mathbf{W}_{01}^{(0)}} + \mathbf{M}_{01}\underbrace{\dot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}}_{\mathbf{W}_{12}^{(1)}}\mathbf{M}_{01}^{-1}\Big)\underbrace{\mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}}_{\mathbf{P}_0^{(0)}} = \\
&= \Big(\mathbf{W}_{01}^{(0)} + \underbrace{\mathbf{M}_{01}\mathbf{W}_{12}^{(1)}\mathbf{M}_{01}^{-1}}_{\mathbf{W}_{12}^{(0)}}\Big)\mathbf{P}_0^{(0)}
\end{aligned}$$



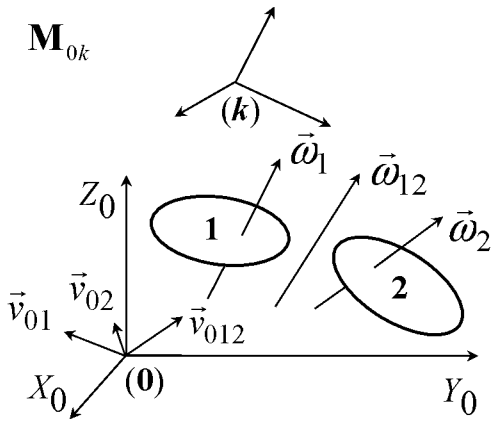
$$\boxed{\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)}\right)\mathbf{P}_0^{(0)}}$$

- La velocità assoluta di P è → $\dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \mathbf{W}_{02}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)}$, dal confronto con la precedente si ha → $\boxed{\mathbf{W}_{02}^{(0)} = \mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)}}$

- Con il cambiamento di riferimento dal sistema **(0)** al generico **(*k*)** si ottiene l'espressione generale

$$\mathbf{M}_{k0}\mathbf{W}_{02}^{(0)}\mathbf{M}_{0k} = \mathbf{M}_{k0}\left(\mathbf{W}_{01}^{(0)} + \mathbf{W}_{12}^{(0)}\right)\ \mathbf{M}_{0k}$$

$$\mathbf{W}_{02}^{(k)} = \mathbf{W}_{01}^{(k)} + \mathbf{W}_{12}^{(k)}$$



- Per mostrare la struttura di $\mathbf{W}_{12}^{(0)}$ omettiamo il pedice **(0)** del riferimento fisso
  - $\mathbf{W}_1^{(0)} \rightarrow$ **moto assoluto** del corpo **1**
  - $\mathbf{W}_2^{(0)} \rightarrow$ **moto assoluto** del corpo **2**
  - $\mathbf{W}_{12}^{(0)} \rightarrow$ **moto relativo** del corpo **2** rispetto al corpo **1**
- Supponiamo di conoscere il moto assoluto dei corpi **1** e **2**

- Dall'espressione del moto relativo $\mathbf{W}_{12}^{(0)} = \mathbf{W}_2^{(0)} - \mathbf{W}_1^{(0)}$ si ottiene

$$\boxed{\mathbf{W}_{12}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12} & & {}^3\mathbf{V}_{012} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^{(0)} \rightarrow \begin{cases} \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}^{(0)} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^{(0)} - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)} \\ {}^3\mathbf{V}_{012}^{(0)} = {}^3\mathbf{V}_{02}^{(0)} - {}^3\mathbf{V}_{01}^{(0)} \end{cases}}$$

Composizione delle accelerazioni

- derivando 2 volte rispetto al tempo la relazione $\mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}$ si ha

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12}\right)\mathbf{P}_2^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{12} + \dot{\mathbf{M}}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12} + \dot{\mathbf{M}}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12} + \mathbf{M}_{01}\ddot{\mathbf{M}}_{12}\right)\mathbf{P}_2^{(2)} = \\ \qquad = \left(\ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{12} + 2\dot{\mathbf{M}}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12} + \mathbf{M}_{01}\ddot{\mathbf{M}}_{12}\right)\mathbf{P}_2^{(2)} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{P}_2^{(2)} \text{ è costante}}$

- introducendo alcune matrici identità del tipo $\rightarrow$ $\mathbf{M}_{ij}^{-1}\mathbf{M}_{ij}$ si ha

$$\ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left[\ddot{\mathbf{M}}_{01}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right)\mathbf{M}_{12} + 2\dot{\mathbf{M}}_{01}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right)\dot{\mathbf{M}}_{12}\left(\mathbf{M}_{12}^{-1}\mathbf{M}_{12}\right) + \mathbf{M}_{01}\ddot{\mathbf{M}}_{12}\left(\mathbf{M}_{12}^{-1}\mathbf{M}_{12}\right)\right]\ \mathbf{P}_2^{(2)} =$$

$$= \left[\ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01} + 2\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\dot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right) + \mathbf{M}_{01}\ddot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}\left(\mathbf{M}_{01}^{-1}\mathbf{M}_{01}\right)\right]\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)} =$$

$$= \Big(\underbrace{\ddot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}}_{\mathbf{H}_{01}^{(0)}} + 2\underbrace{\dot{\mathbf{M}}_{01}\mathbf{M}_{01}^{-1}}_{\mathbf{W}_{01}^{(0)}}\mathbf{M}_{01}\underbrace{\dot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}}_{\mathbf{W}_{12}^{(1)}}\mathbf{M}_{01}^{-1} + \mathbf{M}_{01}\underbrace{\ddot{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{M}_{12}^{-1}}_{\mathbf{H}_{12}^{(1)}}\mathbf{M}_{01}^{-1}\Big)\underbrace{\mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12}\mathbf{P}_2^{(2)}}_{\mathbf{P}_0^{(0)}} =$$

$$= \left(\mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{M}_{01}\mathbf{W}_{12}^{(1)}\mathbf{M}_{01}^{-1} + \mathbf{M}_{01}\mathbf{H}_{12}^{(1)}\mathbf{M}_{01}^{-1}\right)\mathbf{P}_0^{(0)} \qquad \ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{H}_{12}^{(0)}\right)\mathbf{P}_0^{(0)}$$

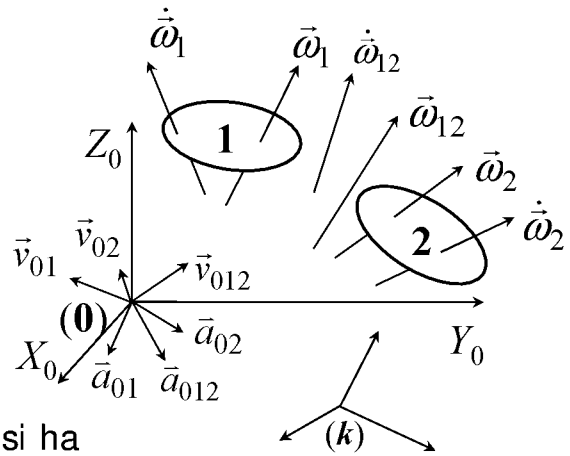
- L'accelerazione assoluta di P è $\ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \mathbf{H}_{02}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)}$, dal confronto con $\ddot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \left(\mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{H}_{12}^{(0)}\right)\mathbf{P}_0^{(0)}$ si ha $\mathbf{H}_{02}^{(0)} = \mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{H}_{12}^{(0)}$

- Con il cambiamento di riferimento dal sistema **(0)** al generico **(*k*)**

$$\mathbf{M}_{k0}\mathbf{H}_{02}^{(0)}\mathbf{M}_{0k} = \mathbf{M}_{k0}\left(\mathbf{H}_{01}^{(0)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)} + \mathbf{H}_{12}^{(0)}\right)\mathbf{M}_{0k}$$

si ottiene l'espressione generale $\boxed{\mathbf{H}_{02}^{(k)} = \mathbf{H}_{01}^{(k)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(k)}\mathbf{W}_{12}^{(k)} + \mathbf{H}_{12}^{(k)}}$

che costituisce il **Teorema di Coriolis**



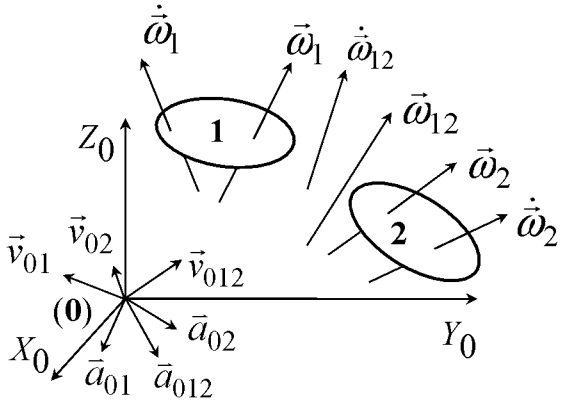
- Consideriamo il riferimento **(0)** fisso e per chiarezza omettiamo il relativo pedice
  - $\mathbf{W}_1^{(0)}, \mathbf{H}_1^{(0)}, \mathbf{W}_2^{(0)}, \mathbf{H}_2^{(0)} \rightarrow$ moti assoluti
  - $\mathbf{W}_{12}^{(0)}, \mathbf{H}_{12}^{(0)} \rightarrow$ moto relativo del corpo **1** rispetto al corpo **2**

- Conoscendo il moto assoluto dei corpi **1** e **2** si ha

$$\boxed{\mathbf{H}_{12}^{(0)} = \mathbf{H}_2^{(0)} - \mathbf{H}_1^{(0)} - 2\mathbf{W}_1^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)}}$$

- La matrice ha la struttura

$$\mathbf{H}_{12}^{(0)} = \mathbf{H}_2^{(0)} - \mathbf{H}_1^{(0)} - 2\mathbf{W}_1^{(0)}\mathbf{W}_{12}^{(0)}$$



$$\mathbf{H}_{12} = \left[\begin{array}{ccc|c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 & & & {}^3\mathbf{A}_{02} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc|c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 & & & {}^3\mathbf{A}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] - 2\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 & & & {}^3\mathbf{V}_{01} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12} & & & {}^3\mathbf{V}_{012} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{H}_{12}^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_{12} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}^2 & {}^3\mathbf{A}_{012}^{(0)} \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{12}^{(0)} & {}^3\mathbf{A}_{012}^{(0)} \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{G}_{12} = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{12} \\ {}^3\mathbf{A}_{012} = {}^3\mathbf{A}_{02} - {}^3\mathbf{A}_{01} - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\,{}^3\mathbf{V}_{012} \end{cases}$$

- elaborando l'espressione

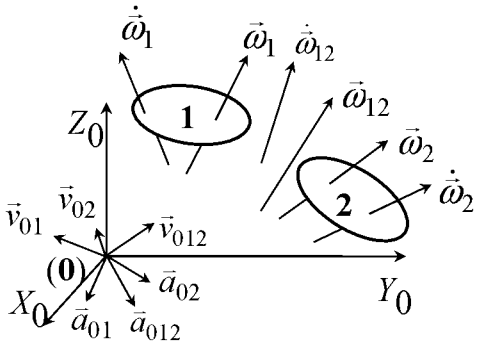
$$\mathbf{G}_{12} = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \underbrace{\underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1} = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1) =$$

$$= \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + \boxed{\underline{\boldsymbol{\omega}}_2^2 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1^2 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1} + 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 =$$

$$= \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + 2(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1\underline{\boldsymbol{\omega}}_2) + \boxed{(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1)^2}$$

- essendo $\mathbf{G}_{12} = \left(\dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_{12} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}^2\right)$

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}^2 = (\underline{\boldsymbol{\omega}}_2 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1)^2 \\ \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_{12} = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_2 - \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_1 + 2\overbrace{(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 - \underline{\boldsymbol{\omega}}_1\underline{\boldsymbol{\omega}}_2)}^{\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_2\boldsymbol{\omega}_1 \end{cases}$$

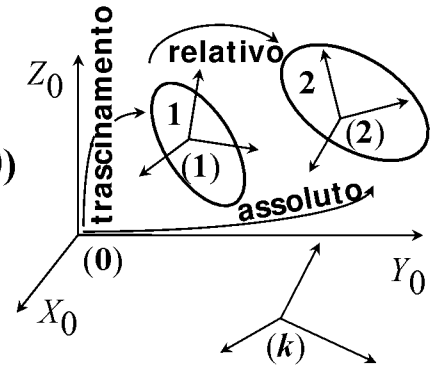


- si ottiene

$$\mathbf{H}_{12}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{G}_{12}^{(0)} & & {}^3\mathbf{A}_{012}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{G}_{12}^{(0)} = \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}_{12}^{(0)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_{12}^{(0)2} \quad \Leftarrow \\ {}^3\mathbf{A}_{012}^{(0)} = {}^3\mathbf{A}_{02}^{(0)} - {}^3\mathbf{A}_{01}^{(0)} - 2\underline{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)}\,{}^3\mathbf{V}_{012}^{(0)} \end{cases}$$

Posizioni, velocità, accelerazioni assolute e relative

- **1** e **2** corpi in moto relativo tra loro e alla terna **(0)**
- **(1)** e **(2)** $\rightarrow$ terne solidali ai corpi **1** e **2**
- **(0)** $\rightarrow$ riferimento fisso da cui osservare i moti
- **(*k*)** $\rightarrow$ riferimento esterno, non in moto rispetto a **(0)**
- sono note le relazioni tra **(1)** $\rightarrow$ **(0)** e **(2)** $\rightarrow$ **(1)**



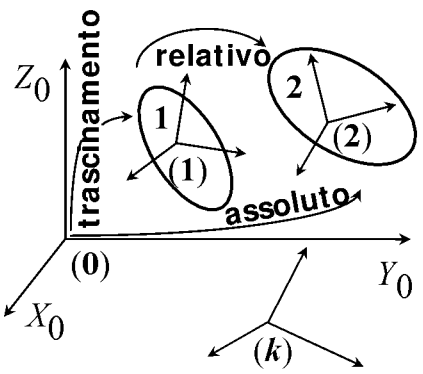
- i risultati ottenuti sono così raggruppati

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12} & \Leftarrow \text{ posizioni} \\ \mathbf{W}_{02}^{(k)} = \mathbf{W}_{01}^{(k)} + \mathbf{W}_{12}^{(k)} & \Leftarrow \text{ velocità} \\ \mathbf{H}_{02}^{(k)} = \mathbf{H}_{01}^{(k)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(k)}\mathbf{W}_{12}^{(k)} + \mathbf{H}_{12}^{(k)} & \Leftarrow \text{ accelerazioni} \end{cases}$$

  - gli indici **02** denotano il moto assoluto
  - gli indici **01** denotano il moto di trascinamento
  - gli indici **12** denotano il moto relativo
  - il termine $2\mathbf{W}_{01}^{(k)}\mathbf{W}_{12}^{(k)}$ è l'accelerazione di **Coriolis**

Relazioni tra moti relativi

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{01}\mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{W}_{02}^{(k)} = \mathbf{W}_{01}^{(k)} + \mathbf{W}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{H}_{02}^{(k)} = \mathbf{H}_{01}^{(k)} + 2\mathbf{W}_{01}^{(k)}\mathbf{W}_{12}^{(k)} + \mathbf{H}_{12}^{(k)} \end{cases}}$$



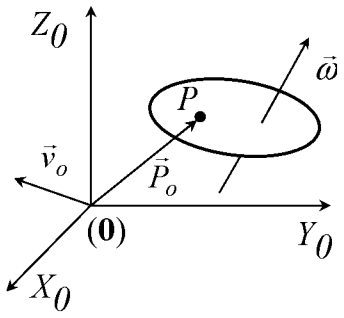
- Le relazioni tra i moti relativi si ottengono sostituendo nelle relazioni precedenti l'indice **0** con l'indice **2**

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{12} & \longrightarrow \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^{-1} \\ \mathbf{0} = \mathbf{W}_{21}^{(k)} + \mathbf{W}_{12}^{(k)} & \longrightarrow \quad \mathbf{W}_{12}^{(k)} = -\mathbf{W}_{21}^{(k)} \\ \mathbf{0} = \mathbf{H}_{21}^{(k)} + 2\mathbf{W}_{21}^{(k)}\mathbf{W}_{12}^{(k)} + \mathbf{H}_{12}^{(k)} & \longrightarrow \quad \mathbf{H}_{12}^{(k)} = -\mathbf{H}_{21}^{(k)} + 2\mathbf{W}_{21}^{(k)2} \end{cases}$$

RELAZIONI TRA LE MATRICI W, H, L

Relazioni tra $W^{(0)}$ e $L^{(0)}$

Si considerino



- Un **corpo in movimento** nello spazio
- La sua **distribuzione di velocità** $\rightarrow \mathbf{W}^{(0)}$
- Un **punto generico** del corpo P
- La **velocità** del punto P è $\rightarrow \dot{\mathbf{P}}_0^{(0)} = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)}$
- Lo **spostamento infinitesimo** è $\rightarrow \quad d\mathbf{P}^{(0)} = \dot{\mathbf{P}}_0^{(0)}dt = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)}dt$
- Tra **velocità angolare** e **rotazione infinitesima** si scrive $\rightarrow \omega = d\alpha/dt$

$$d\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{W}^{(0)}\,\mathbf{P}_0^{(0)}\,\frac{d\alpha}{\omega}$$

- Lo spostamento finito $\Delta\mathbf{P}^{(0)}$ si ottiene invece

$$\mathbf{P}_1^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}(\Delta\alpha)\mathbf{P}_0^{(0)} \quad \rightarrow \quad \Delta\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}_1^{(0)} - \mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}(\Delta\alpha)\,\mathbf{P}_0^{(0)} - \mathbf{P}_0^{(0)}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}(\Delta\alpha)\,\mathbf{P}_0^{(0)} - \mathbf{P}_0^{(0)}}$$

2

- Quindi, per spostamenti infinitesimi si può anche scrivere

$$d\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)}(d\alpha)\,\mathbf{P}_0^{(0)} - \mathbf{P}_0^{(0)} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(0)}d\alpha\right)\mathbf{P}_0^{(0)} - \mathbf{P}_0^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\mathbf{P}_0^{(0)}d\alpha$$

- Confrontando l'espressione appena ottenuta con $d\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{W}^{(0)}\,\mathbf{P}_0^{(0)}\,\dfrac{d\alpha}{\omega}$

$$\boxed{\mathbf{L}^{(0)} = \frac{\mathbf{W}^{(0)}}{\omega}}$$

Legami tra $W^{(k)}$, $H^{(k)}$, $L^{(k)}$ in accoppiamenti elicoidali

Nel caso di **accoppiamenti elicoidali** la matrice $\mathbf{L}^{(k)}$ è una **costante** se la **terna (k)** è **solidale** a uno dei due corpi uniti dall'accoppiamento. Si ha

$$\mathbf{L}^{(k)} = \frac{\mathbf{W}^{(k)}}{\omega} \qquad \text{con} \quad \omega = \dot{\alpha} = \dot{q} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)}\dot{q}}$$

$$\mathbf{H}^{(k)} = \dot{\mathbf{W}}^{(k)} + \mathbf{W}^{(k)2}, \qquad \dot{\mathbf{W}}^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)}\ddot{q} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)}\ddot{q} + \mathbf{L}^{(k)2}\dot{q}^2}$$

103

MATRICI M, W, H, L PER ACCOPPIAMENTI PIANI

Si considerino

- Due corpi $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$ → **connessi da un accoppiamento elicoidale**
- $\mathbf{(1)}$ e $\mathbf{(2)}$ sono due **terne solidali** a ciascun corpo
- L'**asse coordinato Z_1** della terna $\mathbf{(1)}$ è scelto **coincidente** con l'**asse elicoidale**
- Si desidera una descrizione della **cinematica del corpo 2 rispetto al corpo 1** → cioè della **terna (2)** rispetto alla **terna (1)**
- La **struttura** delle matrici di posizione $\mathbf{M}$, velocità $\mathbf{W}$, accelerazione $\mathbf{H}$ e dell'asse elicoidale $\mathbf{L}$ è

$$\mathbf{M}_{ij} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{x}_j^{(i)} & \mathbf{y}_j^{(i)} & \mathbf{z}_j^{(i)} & {}^3\mathbf{O}_j^{(i)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \mathbf{L}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} & \mathbf{t}^{(i)} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{t}^{(i)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(i)3}\mathbf{P}^{*(i)} + \mathbf{u}^{(i)}p \\ \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\dot{q} \\ \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\ddot{q} + \mathbf{L}^{(0)2}\dot{q}^2 \end{cases} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} & {}^3\mathbf{V}_o^{(i)} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{H}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)2} & {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)(2)} = \begin{bmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_y\omega_x & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_z\omega_x & \omega_z\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}^{(i)}$$

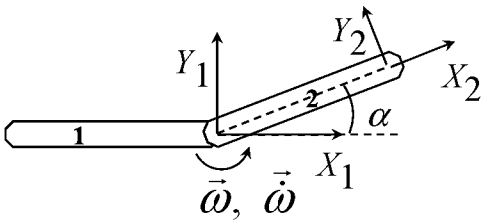
104

Accoppiamento rotoidale

$$\mathbf{M}_{ij} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{x}_j^{(i)} & \mathbf{y}_j^{(i)} & \mathbf{z}_j^{(i)} & {}^3\mathbf{O}_j^{(i)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{L}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} & \mathbf{t}^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{t}^{(i)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(i)3}\mathbf{P}^{*(i)} + \mathbf{u}^{(i)}p \\ \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\dot{q} \\ \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\ddot{q} + \mathbf{L}^{(0)2}\dot{q}^2 \end{cases} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} & {}^3\mathbf{V}_o^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{H}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)2} & {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)(2)} = \begin{bmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_y\omega_x & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_z\omega_x & \omega_z\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}^{(i)}$$

- l_2 → lunghezza del corpo **2**
- $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \{0 \quad 0 \quad \omega\}^{\mathbf{T}}$
- variabile di giunto → $q_2 = \alpha, \quad \dot{q}_2 = \omega, \quad \ddot{q}_2 = \dot{\omega}$



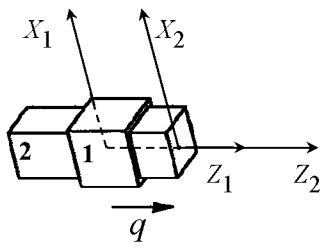
$$\mathbf{M}_{12} = \left[\begin{array}{ccc:c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & l_2\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & l_2\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \mathbf{L}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{W}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{H}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} -\omega^2 & -\dot{\omega} & 0 & 0 \\ \dot{\omega} & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Accoppiamento prismatico

$$\mathbf{M}_{ij} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{x}_j^{(i)} & \mathbf{y}_j^{(i)} & \mathbf{z}_j^{(i)} & {}^3\mathbf{O}_j^{(i)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{L}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} & \mathbf{t}^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{t}^{(i)} = -\underline{\mathbf{u}}^{(i)3}\mathbf{P}^{*(i)} + \mathbf{u}^{(i)}p \\ \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\dot{q} \\ \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{L}^{(0)}\ddot{q} + \mathbf{L}^{(0)2}\dot{q}^2 \end{cases} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} & {}^3\mathbf{V}_o^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{H}^{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} \dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{(i)} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)2} & {}^3\mathbf{A}_o^{(i)} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(i)(2)} = \begin{bmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_y\omega_x & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_z\omega_x & \omega_z\omega_y & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}^{(i)}$$

- l_q → distanza tra le origini delle terne **(1)** → **(2)**
- $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \{0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathbf{T}}$
- variabile di giunto → $q_2 = l_q, \quad \dot{q}_2 = v, \quad \ddot{q}_2 = \dot{v} = a$



$$\mathbf{M}_{12} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_q \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \mathbf{L}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{W}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{H}_{12}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$